Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 2
13 MARZO 2013

1. Si enunci la definizione di spazio vettoriale e si dia a K^n una struttura di spazio vettoriale sul campo K.
SOLUZIONE:
Per la definizione di spazio vettoriale e per il caso di K^n si può consultare il Sernesi alle pagine 17 e 18 (definizione 1.1 ed esempio 1.2.1).

2. Si determini l'inversa delle seguenti matrici:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Determinare inoltre $(AB)^{-1}$ senza calcolare il prodotto AB.

SOLUZIONE:
N.B. Per la risoluzione dell'esercizio possono essere utilizzati due metodi diversi. Li utilizzeremo alternativamente
(i) Consideriamo la matrice A e affianchiamo ad essa la matrice identitá, ottenendo così la seguente matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto cerchiamo, tramite operazioni elementari sulle righe di A', di spostare la matrice identitá sulla sinistra.
I PASSO: Sottraiamo alla seconda riga il doppio della prima cioé applichiamo la seguente operazione elementare: $R_2 = R_2 - 2R_1$
Otteniamo così la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
II PASSO: Dividiamo la seconda riga per -2, cioè $R_2 = -\frac{1}{2}R_2$
Siamo arrivati a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; possiamo subito notare che ora la matrice identitá é a sinistra; ma allora:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ii) Utilizziamo l'altro metodo, sfruttando la definizione di inversa. Voglio trovare B^{-1} tale che $BB^{-1} = I$. Ma allora, usando una matrice generica:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da cui il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 3y + 2t = 0 \\ -2x + 5z = 0 \\ -2y + 5t = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(x, y, z, t) = (\frac{5}{19}, -\frac{2}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19})$.
Quindi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$

(iii) Torniamo a utilizzare il primo metodo.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=R_2-7R_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=R_1-R_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3+\frac{1}{7}R_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-\frac{1}{5}R_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=R_1+\frac{35}{2}R_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=R_2+385R_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=\frac{1}{5}R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{7}R_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=-\frac{35}{2}R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

N.B. Per ottenere i coefficienti del sesto passaggio si ragiona cosí: il nostro scopo è quello di ottenere uno 0 al posto del 22 della seconda riga; per farlo, devo sfruttare necessariamente la terza; la utilizzo così: voglio trovare x t.c. $22 - \frac{2}{35}x = 0$. Risolvendo l'equazione ottengo $x = 385$. Un procedimento simile può essere seguito ogni qualvolta risulti difficoltoso trovare i coefficienti adatti da moltiplicare a una riga.

Ora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, quindi posso tranquillamente calcolare quanto richiesto senza sapere AB e in particolare utilizzando solamente i risultati dei punti precedenti.
N.B. É utile nel caso delle matrici quadrate di ordine 2 utilizzare la seguente formula per calcolare l'inversa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

In particolare l'inversa esiste se e solo se $ad - bc \neq 0$.

3. Si mostri che l'inversa di ogni matrice simmetrica e invertibile é anch'essa simmetrica.

SOLUZIONE:
Innanzitutto dimostro che se A é una matrice invertibile allora

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Infatti $\mathbb{I} = {}^t\mathbb{I} = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA$, quindi $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ per unicitá dell'inversa. Ora, una matrice simmetrica é t.c. $A = {}^tA$, quindi $A^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, dove per l'ultima eguaglianza si é sfruttata la proprietá sulle matrici invertibili citata in precedenza.

4. Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora ${}^tAA$ é simmetrica.

   SOLUZIONE:
   Basta notare che ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$, cioé la matrice ${}^tAA$ é simmetrica in quanto uguale alla sua trasposta.

5. Si determinino, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:

   $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$ il sistema é incompatibile.

   $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$ il sistema é incompatibile.

   $\begin{cases} 3x-y-z-4t=9 \\ 4x-3z-t=0 \\ 8x-2y-5z-9t=18 \end{cases}$

   il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(0, -9-\frac{4}{3}t, -\frac{1}{3}t, t)$.

   $\begin{cases} 2x-2y+z+4t=0 \\ x-y-4z+2t=0 \\ -x+y+3z-2t=0 \\ 3x-3y+z+6t=0 \end{cases}$ il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(-2t, 0, 0, t)$.

6. Si scrivano le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:

   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
   - $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   SOLUZIONE:
   Innanzitutto bisogna osservare che entrambe le matrici sono invertibili e che pertanto possono essere scritte come prodotto di matrici elementari. Iniziamo allora con lo svolgimento: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Tramite operazioni elementari sulle righe di A vogliamo ottenere la matrice identitá (sará piú chiara ad

esercizio concluso la motivazione);
$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=R_2-2R_1]{} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.
La stessa operazione la facciamo sulle righe della matrice identitá:
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=R_2-2R_1]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.
A questo punto possiamo scrivere:
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.
Ora:$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=R_1+\frac{2}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$;
e $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=R_1+\frac{2}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Otteniamo:$\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.
Infine:$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;
e: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{3}R_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$;
da cui:$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Tutti questi calcoli sono serviti per arrivare alla matrice $\mathbb{I}$; a questo punto torniamo indietro, sostituendo successivamente tutte le uguaglianze ottenute:
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.
Se adesso poniamo: $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,$Y = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
si ha che:
$\mathbb{I} = XYZA$ e quindi $Z^{-1}Y^{-1}X^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}\mathbb{I} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}XYZA = A$. Per concludere basta quindi calcolare Z^{-1},Y^{-1} e X^{-1}.
Per quanto riguarda la matrice B il procedimento è analogo.

7. Si discutano i seguenti sistemi al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:
$\begin{cases} kx - y + z = 2\\ x - ky + z = 3 - k^2\\ x - y + kz = k + 1\end{cases}$
Esistono soluzioni uniche per $k \neq -2, 1$ del tipo $(1, k, 2)$;
se $k = -2$ esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(7y - 1, y, 3y)$;
se $k = 1$ esistono ∞^2 soluzioni del tipo $(x = y - z + 2, y, z)$.

$\begin{cases} x + y + z = k\\ x - ky - z = 1\\ 2x + y + kz = k + 1\end{cases}$
Esistono soluzioni per $k \neq 0, 1$ $(\frac{4}{k}, \frac{k-4}{k}, \frac{k+2}{k})$;

se $k=0$ il sistema é incompatibile;
se $k=1$ esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(1,-t,t)$.

$$\begin{cases} x+y+kz=2k-1 \\ x+ky+z=k \\ kx+y+z=1 \end{cases}$$

Esistono soluzioni uniche per $k\neq -2,1$ del tipo $(-2\frac{k+1}{k+2},\frac{k}{k+2},2\frac{k+1}{k+2})$;
se $k=-2$ il sistema é incompatibile;
se $k=1$ esistono ∞^2 soluzioni del tipo $(-y-z+1,y,z)$.

$$\begin{cases} 2x+kz=1 \\ 3x+ky-2z=2 \\ kx+2z=1 \end{cases}$$

Se $k\neq -2,0,2$ il sistema ha soluzioni del tipo $(\frac{1}{2+k},\frac{2k+3}{k(2+k)},\frac{1}{2+k})$;
se $k=0,-2$ il sistema é incompatibile;
se $k=2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni del tipo $(\frac{1}{2}-t,\frac{1}{4}+\frac{5}{2}t,t)$.