Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 5
10 Aprile 2013

1. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x + 2y = 2t = 0\}$
$K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$.

   - Determinare la dimensione e una base di H, K, $H + K$ e $H \cap K$
   SOLUZIONE:
   $dim(H) = 2$ infatti le soluzioni del sistema sono $(-2y, y, z, 0)$ e quindi per poter trovare una base di H basta assegnare valori alternativamente diversi a y e z. Otteniamo la seguente base: $< (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) >$. Per calcolare la dimensione di K basta vedere qual è il numero di vettori linearmente indipendenti tra quelli che generano il sottospazio; in sostanza basta calcolare il rango della seguente matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; si verifica facilmente che è $dim(K) = 3$ e che i tre vettori linearmente indipendenti che costituiscono una base di K sono $< (1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 5) >$

   - Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.
   SOLUZIONE:
   Come ampliamente spiegato, il procedimento per calcolare $dim(H + K)$ è lo stesso degli esercizi precedenti. Si ottiene $dim(H + K) = 4$ e quindi per Grassmann $dim(H \cap K) = 1$. In particolare $H + K = \mathbb{R}^4$ perché hanno stessa dimensione $\Rightarrow$ una base di $H + K$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Ripetiamo ora il procedimento per ottenere una base dell'intersezione: un vettore di $H \cap K$ è un vettore sia di H sia di K; ma allora deve poter essere ottenuto da una combinazione lineare dei vettori della base di K così come di quelli della base di K; la traduzione di questo fatto è la seguente:
   $a(-2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) = (x, y, z, s) = c(1, 2, 0, 1) + d(0, 0, 1, 1) + e(1, -1, 0, 5)$ dove $(x, y, z, s) \in H \cap K$ è un vettore generico dell'intersezione. Dalla serie precedente di uguaglianze otteniamo: $a(-2, 1, 0, 0)+ b(0, 0, 1, 0) - c(1, 2, 0, 1) - d(0, 0, 1, 1) - e(1, -1, 0, 5) = 0$ e dunque un sistema le cui soluzioni sono $(a, b, c, d, e) = (-3t, -26t, t, -26t, 5t)$.
   Sostituendo:
   $-3t(-2, 1, 0, 0)-26t(0, 0, 1, 0) = t(1, 2, 0, 1)-26t(0, 0, 1, 1)+5t(1, -1, 0, 5) = (x, y, z, t)$ e per $t = -1$ otteniamo $(-6, 3, 26, 0)$.

Poiché la somma tra H e K non è diretta può esistere più di un modo per scrivere il vettore $u := (1, 2, 3, 4)$ come somma di un vettore di H e di un vettore di K; in particolare possiamo scrivere $u = (1, 2, 3, 4) + (0, 0, 0, 0)$.

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

- Provare che i sottoinsiemi:
  $F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}$
  $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = -XA\}$
  sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
  SOLUZIONE:
  Per prima cosa vediamo com'é un elemento tipo di F.
  Se $X \in F$ si ha che $AX = XA$ quindi:
  $AX = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 9z & 6y - 9t \\ 4x - 6z & 4y - 6t \end{pmatrix}$.
  $XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 4y & -9x - 6y \\ 6z + 4t & -9z - 6t \end{pmatrix}$.
  Per il principio d'identitá fra le matrici eguaglio componente per componente e ottengo il sistema:
  $\begin{cases} 6x - 9z = 6x + 4y \\ 6y - 9t = -9x - 6y \\ 4x - 6z = 6z + 4t \\ 4y - 6t = -9z - 6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{9}{4}z \\ x = 3z + t \end{cases}$
  $F = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) | X = \begin{pmatrix} 3z + t & -\frac{9}{4}z \\ z & t \end{pmatrix} \right\}$ con $z, t \in \mathbb{R}$.
  F é un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ in quanto contiene il vettore nullo (per $t = z = 0$) ed é chiuso rispetto la somma e il prodotto per scalari. In particolare si é risolto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, in cui peró due equazioni erano dipendenti dalle altre due, quindi $dim(F) = 2$ per Rouché-Capelli. Quindi per trovare una base basta trovare due matrici in F indipendenti; per farlo basta azzerare t e porre $z = 4$, e poi fare la stessa cosa a variabili invertite(ma con $t = 1$). In questo modo:
  $F = \left\langle \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

  Per trovare il vettore tipo di G si ragiona in modo analogo fino ad ottenere le relazioni:
  $\begin{cases} x = -t \\ y = \frac{9}{4}z + 3t \end{cases}$
  Per Rouché-Capelli $dim(G) = 2$ e una sua base é data dalle matrici $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

- Determinare una base per i sottospazi vettoriali F, G ,$F + G$ e $F \cap G$.
  SOLUZIONE: Per determinare una base di $F + G$ considero le matrici quadrate di ordine 2 come un vettore in $\mathbb{R}^4$, prestando particolare attenzione all'ordine delle componenti. La dimensione di $F + G$

equivale dunque al rango della matrice
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & -9 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dim(F+G) = 3.$

In particolare $F + G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$
$dim(F \cap G) = 1$ per la formula di Grassmann quindi per avere una base dell'intersezione mi basta trovare un vettore non nullo appartenente a entrambi i sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$.
Se $v \in F$ e $v \in G$ si ha che v puó essere scritto come combinazione lineare di entrambe le basi, quindi:
$v = a(1;0;0;1) + b(12;-9;4;0)$ e $v = c(-1;3;0;1) + d(0;9;4;0)$ da cui ricavo il sistema:
$\begin{cases} a + 12b = -c \\ -9b = 3c + 9d \\ 4b = 4d \\ a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6b \\ c = -6b \\ d = b \end{cases}$
Basta porre $b = 1$ e sostituire in una delle due espressioni precedenti per trovare che $F \cap G =< v := (6;-9;4;-6) >$.

- Data la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$ stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.
  SOLUZIONE: $h = 5$.

- Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.
  SOLUZIONE: La somma $F + G$ non é diretta; possono esserci piú modi per esprimere una stessa matrice come somma di una matrice di F e di una matrice di G. In questo caso per costruzione $C := 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  quindi basta porre $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$ e $C_2 := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

3. Siano A e B due matrici quadrate di ordine na coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $r(A + B) \leq r(A), r(B)$
  SOLUZIONE:
  Falsa. Controesempio: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. A + B = I_2$, $r(A) = 1 = r(B) = 2$.

- $r(A) = r = r(B) \to r(AB) = r(r < n)$
  SOLUZIONE:
  Falsa. Controesempio: A e B come sopra, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(AB) =$

0.

- $r(A) = n = r(B) \to r(AB) = n$
  SOLUZIONE:
  Vera. Dimostrazione: Se $r(A) = n = r(B)$, A e B sono invertibili e quindi abbiamo $r(AB) \leq r(A)$ (sempre vera), inoltre $r(A) = r(ABB^{-1}) \leq r(AB)$, quindi $r(AB) = r(A) = n$.

- $r(A) < n; r(B) < n \to r(AB) < n$
  SOLUZIONE:
  Vera. Dimostrazione: Se $r(A) = n$ e $r(B) = n$, ovviamente avrá $min(r(A), r(B)) < n$, ma essendo $r(AB) \leq min(r(A), r(B))$ avremo che $r(AB) \leq min(r(A), r(B)) < n$, ovvero $r(AB) < n$.
  Nel caso siano vere, si esibisca una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   SOLUZIONE:
   Innanzitutto osserviamo che il rango di tutte queste matrici é al massimo tre. Per trovare il rango basta ridurre a gradini e si ha che $r(A) = r(B) = r(C) = 2$ e $r(D) = 3$.

5. Calcolare il rango delle matrici A e B al variare di $a \in \mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   SOLUZIONE:

   Riducendo a gradini si vede facilmente che la matrice A ha rango massimo, cioé $r(A) = 4$.
   Il rango puó anche essere visto anche come l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate con rango massimo. Nel caso della matrice B basta

considerare che $r(B) \leq 3$ e che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango massimo per concludere che $r(B) = 3$.

6. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   SOLUZIONE:
   Per determinare quante sono le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di $a \in \mathbb{R}$ sfrutto il teorema di Rouché Capelli, il quale afferma che il sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti é uguale al rango della matrice orlata; in tal caso il numero delle soluzioni del sistema é pari a ∞^{n-r} dove n =numero di incognite e r =rango trovato.
   Cominciamo quindi con il calcolare il rango della matrice A: $r(A) = 3$ se $a \neq \pm 1$ e $r(A) = 2$ se $a = \pm 1$ in quanto posso trovare un minore di ordine 2 con rango massimo (vedi ragionamento esercizio pecedente).
   Ecco tutti i casi possibili al variare di $a \in \mathbb{R}$

   - Se $a \neq \pm 1$ il sistema ammette una sola soluzione per Rouché Capelli e tale soluzione é ottenuta per $X = A^{-1}B$.
   - Se $a = 1$ calcolo il rango della matrice orlata. In questo caso tutti i minori di ordine 3 non hanno rango massimo quindi $r(A|B) = 2$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
   - Se $a = -1$ si ha che $r(A|B) = 3$ in quanto il minore di ordine 3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango massimo $\Rightarrow$ Il sistema é incompatibile per Rouché-Capelli.

7. Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli di determinino le soluzioni dei seguenti sistemii di equazioni lineari, al variare del parametro reale a.
   NB:Denoteremo con A la matrice de coefficienti del sistema, con b la colonna dei coefficienti e con $A|b$ la matrice orlata.

   - $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$
     SOLUZIONE:
     Poiché la prima e la terza colona della matrice A sono uguali abbiamo che $r(A) = 2$.Tuttavia $r(A|b) = 3$, quindi grazie al teorema di

Kronecher possiamo concluder che il sistema non é compatibile.

- $\begin{cases} x-2y=a \\ 3x+ay+z=0 \\ 2ax-ay+z=a \end{cases}$

SOLUZIONE:
Se $a \neq 3$ il sistema ammette un'unica soluzione $\frac{(2a^2-2a, 2a^2-4a, -2a^3-2a^2-6a)}{-2a+6}$.
Se $a=3$ abbiamo che $r(A)=2$ e $r(A|b)=3$ e quindi il sistema é incompatibile.

- $\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ ax+y+az=1 \\ 3x+ay-az=0 \end{cases}$

SOLUZIONE:
Se $a \neq -1$ allora $r(A)=3$ quindi il sistema ammette esattamente una soluzione:

$$\frac{(a^2+a, -2a-3, a)}{a^3-2a-3}$$

Se $a=1$ il sistema é incompatibile in quanto la matrice orlata ha rango 3.

- $\begin{cases} ax+az=1 \\ 3x+y+az=a \\ ax+3y=1 \end{cases}$

SOLUZIONE:
Se $A \neq 0$ e $A \neq \frac{9}{4}$ il $r(A)=3$ quindi esiste un' unica soluzione $\frac{(3a^2-3a-1, -a^3+3a, -2a^2-a+9)}{-4a^2+9a}$.
Se $A=0$ e $A=\frac{9}{4}$ il sistema é incompatibile, infatti in entrambi i casi risulta che $r(A)=2)$ mentre $r(A|b)=3$.

- $\begin{cases} ay+az=a \\ ax+y+az=2 \\ ax-ay-az=a \end{cases}$

SOLUZIONE:
Se $A \neq 0$ e $A \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione $(2, \frac{3a-2}{a-1}, \frac{-2a+1}{a-1})$.
Se $A \neq 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni della forma $(t, 2, s)$ con $t, s \in \mathbb{R}$.
Se $a=1$ il sistema risulta incompatibile.

- $\begin{cases} x+z=-2 \\ 2x+y+t=-1 \\ -y-2t-2z=2 \\ 3x-3y+z+t=1 \end{cases}$

SOLUZIONE:

Il sistema ammette una soluzione $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 1)$.