**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di GE110

**A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez**
**Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri**

Tutorato 7
24 Aprile 2013

1. Si determinino esplicitamente, al variare del parametro $k$, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando in caso di soluzione unica il metodo di Cramer:

$$(a)\begin{cases}2y+kz=1\\kx+2y=2\\y+kz=3\end{cases}\quad(b)\begin{cases}kx+z=k\\ky+3z=k\\2x+ky+z=k\end{cases}\quad(c)\begin{cases}3x+ky+2z=1\\5x+ky+kz=0\\x+kz=1\end{cases}\quad(d)\begin{cases}x+kz+w=1\\x+2y+kz+w=0\\z+2w=2\\x+kw=0\end{cases}$$

**SOLUZIONE:**
Nella risoluzione dei sistemi denoteremo con $A$ la matrice dei coefficienti del sistema e con $b$ la colonna delle soluzioni.

$(a) Det(A) = -k^2$.
Se $k \neq 0$ si ha che $r(A) = 3$ e quindi $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(\frac{6}{k}; -2; \frac{5}{k}\right)$.
Se invece $k = 0$ il sistema risulta essere incompatibile in quanto $r(A) = 1$ e $r(A|b) = 2$.

$(b) Det(A) = -2k(k+1)$.
Se $k \neq 0; -1$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $\left(\frac{k}{k+1}; \frac{k-2}{k+1}; \frac{k}{k+1}\right)$.
Se $k = 0$ allora il sistema è compatibile e ammette $\infty^1$ soluzioni del tipo $(0; t; 0)$.
Se $k = -1$ allora il sistema risulta incompatibile.

$(c) Det(A) = -2k(k-2)$.
Se $k \neq 0; -2$ allora $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(-\frac{k+4}{2k-4}; \frac{5k+2}{k(2k-4)}; \frac{3}{2k-4}\right)$.
Se $k = 0$ il sistema risulta incompatibile.
Se $k = 2$ il sistema risulta ugualmente incompatibile.

$(d) Det(A) = 6k-2$.
Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(-\frac{k(2k+1)}{3k-1}; -\frac{1}{2}; \frac{2k}{3k-1}; \frac{2k-1}{3k-1}\right)$.
Se $k = \frac{1}{3}$ il sistema risulta incompatibile.

2. Stabilire, al variare del parametro reale $a$, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolarne il rango.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

**SOLUZIONE:**

$det(A) = 2a^2 - 4$.

Se $a \neq \pm\sqrt{2}$ allora $A$ é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a^2-2} & \frac{-a+1}{2a^2-4} & \frac{3a-1}{2a^2-4} \\ \frac{a}{a^2-2} & \frac{-a+2}{2a^2-4} & \frac{a-6}{2a^2-4} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{2}$ si ha che $r(A) = 2$, quindi la matrice non é invertibile.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

**SOLUZIONE:**

$det(B) = 2a^2 - 3$.

Se $a \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ allora $B$ é invertibile e la sua inversa é:

$$\frac{1}{2a^2-3}\begin{pmatrix} a^2-1 & a & -a^2 \\ -a^2+2 & a & a^2-3 \\ -a & -3 & 3a \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha che $r(B) = 2$, quindi $B$ non é invertibile.

$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

**SOLUZIONE:**

$det(C) = a(a-2)(a+1)$.

Se $a \neq 0, 2, -1$ allora C é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & -\frac{1}{a^2-a-2} \\ \frac{2}{a^2-a-2} & \frac{a+2}{a^2+a} & -\frac{a}{a^2-a-2} \\ -\frac{2}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & \frac{a}{a^2-a-2} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 0, 2, -1$ si ha che $r(C) = 2$, quindi $C$ non é invertibile.

$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

**SOLUZIONE:**
$det(D) = a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1)$.
Se $a \neq -1$ allora $D$ é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{a}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a-1}{-a^2-1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -\frac{a^2+a+1}{a^3+a2+a+1} \\ \frac{1}{a^2+1} & -\frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{-a^2+a}{-a^2-1} & -\frac{a^3}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & -\frac{1}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -\frac{a}{a^3+a^2+a+1} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = -1$ allora $r(D) = 3$, quindi la matrice $D$ é invertibile.

3. Stabilire se i punti $A$,$B$,$C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene.Quando c'é un parametro, discuterlo.
   ($a$) $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 6)$
   **SOLUZIONE:**
   Affinché $A$, $B$ e $C$ siano allineati, deve essere $det \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{BC} \end{pmatrix} = 0$;
   quindi in questo caso i punti sono allineati.
   Per trovare la retta che li contiene, notiamo innanzitutto che se tre punti sono allineati é sufficiente considerare la retta che ne contiene due qualunque distinti, siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Basta imporre che per qualsiasi punto $(x, y)$ sulla retta i vettori $(x - x_1, y - y_1)$ e $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ siano allineati, ovvero:
   $$det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$$
   In questo caso, prendendo $P_1 = A$ e $P_2 = B$ troviamo che la retta é $3x - y - 3 = 0$.

   ($b$) $A = (5, 4)$, $B = (4, 6)$, $C = (2, 1)$
   **SOLUZIONE:**
   I punti non sono allineati.

   ($c$) $A = (2, 1)$, $B = (3, k + 1)$, $C = (2 + k, 2)$
   **SOLUZIONE:**
   Allineati per $k = \pm 1$.
   Per $k = 1$ la retta é $x - y - 1 = 0$; per $k = -1$ la retta é $x + y - 3 = 0$.

4. Si scrivano l'equazione del piano $E$ soddisfacente alle seguenti proprietá:
   ($a$) passante per $A(1, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 2, 3)$.
   ($b$) passante per $B(0, 1, 1)$ e $C(3, 2, 1)$ e parallelo a $w = (0, 0, 5)$.
   SOLUZIONE:Per quanto riguarda il primo punto abbiamo gratis tutte le informazioni necessarie per determinare le equazioni parametriche del piano cercato che risulta essere passante per $A$ ed avere giacitura $< u, v >$.
   Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo $B$ come punto noto ed otteniamo che la giacitura del piano é $< (3, 1, 0), w >$ e possiamo procedere nel calcolare l'equazione cartesiana in maniera usuale.
   Le soluzioni trovate sono:

$(a)$ $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
$(b)$ $x - 3y + 3 = 0$.

5. Dati i seguenti sottospazi affini si trovi una base della loro giacitura:
$(a)$ $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 - x_4 = e\}$;
$(b)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + z - 5y = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 5\}$;
$(c)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -1 \wedge x = 2\}$.
SOLUZIONE:$(a)$ $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$;
$(b)$ $\{(5, 0, 5)\}$;
$(c)$ $\{(0; 1; 0)\}$.

6. Si trovi per ogni coppia di punti A, B, C $\in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta passante per essi, e si trovi poi il piano in cui sono contenuti. Quando cè il parametro, discuterlo.

- $A = (1, 1, 0) \quad B = (1, 0, 1) \quad C = (1, 0, 0)$.
- $A = (0, 0, 0) \quad B = (1, 2k, k) \quad C = (k, k, 2)$.
- $A = (1, k, k) \quad B = (2, 2k, 2) \quad C = (k, 1, 1)$.

SOLUZIONE:

- Troviamo dapprima la retta $r$ passante per $A$ e $B$. Tale retta avrá giacitura $v = (1 - 1, 0 - 1, 1 - 0) = (0, -1, 1)$ e passerá ad esempio per $A$; le sue equazioni parametriche saranno quindi:
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. Allo stesso modo troviamo che la retta per $B$ e $C$ avrá giacitura $w = (1 - 1, 0 - 0, 0 - 1) = (0, 0, -1)$ e passerá ad esempio per $B$;
le sue equazioni parametriche saranno $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$.
Il piano per $A$, $B$ e $C$ avrá giaciture $v$ e $w$ e passerá per $A$:
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - s \end{cases}$.

- Come prima, $v = (1, 2k, k)$ e $w = (k, k, 2)$. Studiamo per quali valori di $k$ i tre punti sono allineati; ció equivale a studiare i valori di $k$ per i quali le due giaciture sono una multipla dell'altra cioé per i quali il rango della matrice:
$\begin{pmatrix} 1 & 2k & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}$ é minimo. Studiando tutti i minori di ordine 2 notiamo che non esiste un $k$ che li annulla tutti e tre contemporaneamente pertanto $r$ e $s$ non sono mai parallele,dove abbiamo indicato con $r$ e $s$ rispettivamente la retta per $A$,$B$ con giacitura $v$ e la retta per $A$ e $C$ con giacitura $w$. Le loro equazioni parametriche, pertanto, sono:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2kt \\ z = kt \end{cases} , s : \begin{cases} x = kt \\ y = kt \\ z = 2t \end{cases} .$$

A questo punto il piano che ci interessa passerá ad esempio per $A$ e avrá giaciture $v$ e $w$.

$$\begin{cases} x = t + ks \\ y = 2kt + ks \\ z = kt + 2s \end{cases} .$$

- Il ragionamento é identico al precedente. Per $k = 1$ i tre punti risultano allineati e pertanto esisteranno infiti piani che li contengono tutti e tre. Il caso $k \neq 1$ si fa come al solito.