Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 8
8 MAGGIO 2013

1. Verificare che le rette:$r: x+2y+z-1 = x-3z+3 = 0$ $s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = z$ sono parallele, e trovare l'equazione del piano E che le contiene.

   SOLUZIONE:
   Calcoliamo la loro giacitura v e verifichiamo quindi che sono parallele. Poi ci calcoliamo due punti$R$ e S rispettivamente appartenenti a r e s e calcoliamo l'equazione del piano passante per R e di giacitura $< v; \vec{SR} >$. Le soluzioni trovate sono: $R = (0; 0; 1)$; $S = (1; 2; 0)$ e $E : y + 2z = 0$.

2. Sia $A^2(\mathbb{R})$ il $2-spazio$ affine numerico, sia $O\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2$ il sistema di riferimento standard:
   (a) si trovino le equazioni parametriche e cartesiana della retta r passante per $P = (1, 2)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2})$;
   (b) si consideri la retta s passante per i punti $Q = (0, -\frac{3}{2})$ e $R = (-1, 2)$, si trovino le equazioni parametriche e cartesiana;
   (c) r e s sono sghembe? Sono parallele? Sono incidenti? (Giustificare la risposta);
   (d) si trovino gli eventuali punti in comune;
   (e) si determinino le equazione della retta π del fascio proprio con centro il punto $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$ passante per $O = (0, 0)$;
   (f) si scriva l'equazione del fascio improprio di rette parallele a π.

   SOLUZIONE:
   (a)$x + 2y - 5 = 0, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$;
   (b)$7x + 2y + 3 = 0, \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t \end{cases}$;
   (c) Due rette nel piano non possono essere sghembe, non sono parallele perché non hanno la stessa giacitura, quindi sono incidenti.
   (d) Il punto in comune é $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$;
   (e)$19x + 8y = 0$;
   (f)$19x + 8y + t = 0$.

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.
   (a) Sia r la retta di equazioni cartesiane: $r: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$
   Determinare le equazioni parametriche di r.

(b) Sia s la retta di equazioni cartesiane: $s : \begin{cases} x+1=0 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases}$
Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il loro punto di intersezione.
(c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (1, 0, 1)$.
(d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (1, -1, 4)$.
(e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

SOLUZIONE:
(a) Per trovare un vettore di direzione della retta r basta imporre $w = (l, m, n)$ dove $l = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $m = -det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $n = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Prendendo il punto $(-1, 1, 0)$ (andava bene un qualsiasi punto della retta) possiamo scrivere:
$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}.$$
(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s; allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $det(A) = 0$.In questo caso si vede che $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4.$
Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.
(c) Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano p' tale che p' contiene sia la retta r che il punto P(equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P), inoltre i piani p' e p'' sono distinti (altrimenti r ed s sarebbero complanari) ed hanno un punto in comune, quindi $p' \cup p'' = t$ come richiesto. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r, $\lambda(x+2z+1)+\mu(2x+y+3z+1) = 0$, imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $4\lambda + 6\mu = 0$, scegliendo ad esempio $\lambda = -3$ e $\mu = 2$ (andavano bene due qualsiasi valori di λ e di μ che risolvevano l'equazione)troviamo il piano $p' : x + 2y - 1 = 0$; utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s, $\lambda(x+1)+\mu(2x+3y+1) = 0$ imponiamo il passaggio per il punto P e otteniamo $2\lambda + 3\mu = 0$ allora $p'' : x + 6y - 1 = 0$. Allora le equazioni cartesiane di $t = p' \cup p''$:
$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+6y-1=0 \end{cases}.$$
(d) Le equazioni parametriche di q sono:
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}.$$
Scrivendo la matrice: $\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

e annullando due qualsiasi dei suoi minori otteniamo le equazioni cartesiane di q:
$\begin{cases} -x-y+1=0 \\ 4y+z=0 \end{cases}$.

(e) Per vedere se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe comincio con vedere il rango della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si nota subito che $det(B) = 0$; inoltre si puó vedere che la sottomatrice $B(123|123)$ é invertibile (ha rango massimo). Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha un'unica soluzione (in altre parole le rette sono incidenti) e il punto di intersezione é il punto $(1, 0, 0)$.

4. Date le seguenti n-uple di punti in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ fornire: dimensione, giacitura, equazioni cartesiane, equazioni parametriche del sottospazio minimo di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ che le contiene.
$A = \{(1,0,0),(1,1,1),(1,3,3)\}$
$B = \{(1,2,1),(2,5,2),(-1,-3,-1)\}$
$C = \{(0,0,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$
$D = \{(1,4,2),(1,5,3),(1,1,1)\}$
$E = \{(0,1,1),(4,3,2),(2,2,\frac{3}{2})\}$
$F = \{(3,2,7),(2,1,2),(0,0,1)\}$
$G = \{(1,2,0),(2,0,1),(3,3,3),(5,0,2)\}$
$H = \{(1,0,0),(0,1,1),(4,1,0),(5,0,-1)\}$

SOLUZIONE:
Dati n punti $\{P_1; ::::; P_n\} \in A^3(\mathbb{R})$ per trovare il sottospazio minimo che li contiene ne scegliamo uno, sia P_i, e imponiamo che questo sia il nostro punto noto; poi otteniamo la giacituira nel seguente modo:

$$W =< Pj >_{j \neq i}$$

Si prosegue con il calcolo delle equazioni parametriche e cartesiane nel modo usuale. Le equazioni trovate sono: $A : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.

$B : \begin{cases} x = 1+u-2v \\ y = 2+3u-5v \\ z = 1+u-2v \end{cases} ; z-x=0.$

$C : \begin{cases} x = u+3v \\ y = 2u+2v \\ z = 3u+v \end{cases} ; 4x-7y+4z=0.$

$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+3u+4v \\ z = 1+u+2v \end{cases} ; x-1=0.$

$$E: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} .$$

$$F: \begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 1 + 2u + v \\ z = 1 + 6u + v \end{cases} ; -2x + 6y - z + 1 = 0.$$

G: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

H: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

5. Confrontare la retta: $\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ con i sottospazi A, B, C, D dell'esercizio precedente e dire per ognuno di essi se risulta essere contenuta, parallela,coincidente, incidente o sgemba con il sottospazio. Inoltre nel caso di incidenza fornire il punto di incidenza.

   SOLUZIONE:
   Per risolvere questo esercizio bisogna confrontare le giaciture della retta e dei sottospazi per determinare il parallelismo o il non parallelismo. In seguito mettiamo a sistema le equazioni cartesiane per determinare i punti i incidenza.
   Queste due informazioni sono sufficienti per determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini.
   Le soluzioni trovate sono:
   A e r sono coincidenti;
   B e r sono incidenti nel punto $(1; 1; 1)$;
   C e r sono incidenti nel punto $(1; \frac{3}{4}; \frac{3}{4})$;
   D contiene r.

6. Esiste un applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $ker(f) = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\}$?

   SOLUZIONE: Per vedere se puó esistere un'applicazione del genere cerco una base del nucleo dell'ipotetica f.
   $Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 2z = 0\}$, quindi un vettore tipo del nucleo sará della forma $(-2y, y, 0, t)$, con $y, t \in \mathbb{R}$, da cui deduciamo che $dim(Ker(f)) = 2 \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$, per il teorema della nullitá piú rango. Dunque non puó esistere un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, in quanto la dimensione dell'immagine é in ogni caso minore della dimensione del codominio.

7. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:
   $f(x; y; z) := (2x + 2y; x + z; x + 3y - 2z)$.
   (a) Dire se f é suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore v t.c. $f^{-1}(v) = \emptyset$.
   (b) Dire se f é iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori a e b

in $\mathbb{R}^3$ t.c. $a \neq b$ ma $f(a) = f(b)$.
(c) Sia $E =< u; w >$, dove $u = (1; 0; 1)$;$w = (0; 1; 1)$. Dire se il vettore $x = (4; 3; -2) \in f(E)$.

SOLUZIONE:
(a) Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$ dove con e_i, $i = 1, 2, 3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che f non é suriettivo perché lo spazio di arrivo ha dimensione tre mentre $dim(Im(f)) = 2$. Il vettore cercato sará un qualsiasi vettore che non appartiene all'immagine, quindi un vettore che non puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base di Im(f); basta prendere un vettore che sia linearmente indipendente rispetto ad essi per esempio $v := (0; 1; 0)$.

(b) L'operatore non é iniettivo perché per il teorema nullitá piú rango il suo nucleo non é banale (ha dimensione 1).Per trovare i vettori cercati mi genero un vettore del kernel non nullo attraverso il sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per esempio sia $k = (1; -1; -1)$. Quindi abbiamo che $f(v) = f(v + k)$ ma $v \neq v + k \quad \forall v \notin ker(f)$.

(c) $f(E)$ é il sottospazio $< f(v); f(w) >=< (2; 2; -1); (2; 1; 1) >$.
Quindi si ha che $x \in f(E)$ se puó essere scritto come combinazione lineare della base, ossia deve essere nullo il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

. Tuttavia tale determinante é diverso da 0, quindi $x \notin f(E)$.

8. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:
(a) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$;
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita come $(x, y) \longrightarrow (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$;
(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (x + y - z, x - y + z)$.

SOLUZIONE:
(a) Cominciamo con il verificare che$F$ é un'applicazione lineare. Presi $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che $F(v + w) = F(a + d, b+e, c+f) = (2(c+f)-(a+d), (a+d)+(b+e), (a+d)+2(b+e)+2(c+f)) = ((2c - a) + (2f - d), (a + b) + (d + e), (a + 2b + 2c) + (d + 2e + 2f)) = (2c - a, a + b, a + 2b + 2c) + (2f - d, d + e, d + 2e + 2f) = F(v) + F(w)$.
Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$, con $v = (a, b, c)$, vale

$F(kv) = F(ka, kb, kc) = (2kc - ka, ka + kb, ka + 2kb + 2kc) = (k(2c - a), k(a + b), k(a + 2b + 2c)) = k(2c - a, a + b, a + 2b + 2c) = kF(v)$.
Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$ dove con e_i, $i = 1, 2, 3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che $Im(F) =< (-1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 0, 2) >=< (0, 1, 2), (2, 0, 2) >$, possiamo quindi concludere che $dim(Im(F)) = 2$ e che, per il teorema del rango piú nullitá abbiamo che $dim(ker(F)) = 1$.
Per determinare il nucleo di F basta porre $F(v) = (0, 0, 0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non é l'unico modo di trovare le soluzioni), cosí facendo troviamo che $ker(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (t, -t; \frac{t}{2}), t \in \mathbb{R}\}$.
(b) $Im(F) =< (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) >$, $ker(F) = (0, 0)$.
(c) $Im(F) =< (1, 1), (-1, 1), (-1, 1) >=< (1, 1), (-1, 1) >= \mathbb{R}^2$. Il nucleo avrá quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(v) = (0, 0)$ e otteniamo $ker(F) = (0, t, t)$.