

# Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 9

15 MAGGIO 2013

1. In  $A^3$ :

- Si scriva l'equazione del piano  $\alpha$  passante per i punti  $A = (1; 0; 0)$ ;  $B = (2; 1; 1)$  e  $D = (0; 1; 1)$ ;

**SOLUZIONE:**

Troviamo che  $\vec{AB} = (1; 1; 1)$  e  $\vec{AD} = (-1; 1; 1)$  quindi  $giac(\alpha) = \langle (1; 1; 1); (-1; 1; 1) \rangle$ .

Le equazioni parametriche di  $\alpha$  saranno:

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = t + s \\ z = t + s \end{cases}$$

Notiamo che  $y = z$  pertanto quest'ultima è proprio l'equazione cartesiana di  $\alpha$ .

- Si scriva l'equazione del piano  $\beta$  contenente le rette  $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases}$

e  $s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$  **SOLUZIONE:**

Per trovare la giacitura di  $r$  basta risolvere il sistema omogeneo determinato dalle equazioni cartesiane di  $r$ .

Otteniamo che  $giac(r) = \langle (1; 0; 0) \rangle$ .

Allo stesso modo si ha che  $giac(s) = \langle (1; 4; 1) \rangle$ .

Il piano  $\beta$  avrà equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 4s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$  e, come pri-

ma, si nota immediatamente che  $x = z$  che corrisponde all'equazione cartesiana di  $\beta$ .

- Si determini se i due piani sono paralleli o incidenti.

**SOLUZIONE:**

I due piani sono incidenti.

2. Data la matrice  $A := \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}$ , con  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ , associata ad un

endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  (rispetto alla base canonica).

È possibile determinare univocamente  $A$  sapendo che  $f$  non è iniettiva e che:  $f(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2)$ ?

**SOLUZIONE:**

La matrice  $A$  é definita a meno di 4 parametri, quindi per definirla univocamente avremmo bisogno di 4 equazioni nelle incognite  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .

Queste equazioni ci sono fornite dalle condizioni che l'esercizio impone su  $A$ . Una ci é data dal fatto che l'applicazione associata ad  $A$  non deve essere suriettiva, quindi non deve avere immagine di dimensione tre, cioè  $A$  non deve avere rango massimo ( $\det(A) = 0$ ). Altre tre ci sono date dal fatto che il vettore di componenti  $(1; 1; 1)$  debba essere mandato da  $f$  nel vettore di componenti  $(2; 2; 0)$ .

Imposto quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{da cui } \begin{cases} 3x + 2y + 7z - 2xt + yt = 0 \\ x = -1 \\ y = 3 \\ z + t = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 3, z = -4t = 5$$

3. Sia  $f$  l'operatore di  $\mathbb{R}^4$  la cui matrice, rispetto alla base canonica, é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare  $\dim(\text{Ker}(f))$  e  $\dim(\text{Im}(f))$ .

**SOLUZIONE:**

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In generale  $\dim(\text{Im}(f)) = r(A)$ ,  $A$  matrice associata a  $f$ ,

mentre  $\dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{Im}(f))$ , dove  $n$  é la dimensione del dominio, per il teorema della nullità piú rango.

Infatti sia  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  base canonica di  $\mathbb{R}^4$  e  $\underline{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  si ha che:

$$\underline{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \text{ e } f(\underline{x}) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$$

in quanto  $f$  funzione lineare.

$f(\underline{x})$  é dunque combinazione lineare dei vettori immagine della base canonica, ossia  $\text{Im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle$ .

Tuttavia questi costituiscono le colonne della matrice associata a  $f$ , quindi  $\dim(\text{Im}(f)) = r(A)$ , ossia il massimo numero di vettori lin. ind. tra i vettori immagine della base.

In questo caso  $\det(A) = 4$ , dunque la matrice ha rango massimo  $\rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 4$  e

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 4 = 0.$$

4. In  $R^3$  si considerino le basi:  $B_1 = \{(1; 1; 1); (0; 2; 3); (1; 0; 3)\}$ ;  $B_2 = \{(4; 3; 1); (0; 1; 2); (1; 0; 1)\}$ .

Determinare la matrice  $P$  del cambiamento di base da  $B_1$  a  $B_2$ .

Determinare la matrice  $Q$  del cambiamento di base da  $B_2$  a  $B_1$ .

**SOLUZIONE:**

$$B_1 = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 3)\}$$

$$B_2 = \{(4, 3, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)\}$$

Per calcolare la matrice del cambiamento di base  $P$  utilizzo la formula del cambiamento di base:

$$P = M_{B_2, B_1}(\mathbb{I}) = M_{B_2, e}(\mathbb{I})M_{e, B_1}(\mathbb{I}) = (M_{e, B_2}(\mathbb{I}))^{-1}M_{e, B_1}(\mathbb{I}) \Rightarrow$$

$$M_{e, B_2}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ da cui ricavo l'inversa:}$$

$$M_{B_2, e}(\mathbb{I}) = (M_{e, B_2}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix};$$

$$M_{e, B_1}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ora mi basta sostituire nella formula precedente per ottenere la matrice  $P$ :

$$P = M_{B_2, B_1}(\mathbb{I}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 15 & 6 \\ 1 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $Q$  si può sia ragionare in maniera del tutto analoga, sia utilizzare il fatto che:

$$Q = M_{B_1, B_2}(\mathbb{I}) = (M_{B_2, B_1}(\mathbb{I}))^{-1}$$

**N.B.** La relazione precedente vale solo per le matrici di cambiamento di base in quanto la f.ne a cui sono associate è l'identità.

In questo caso conviene procedere come prima in quanto mi manca solo da calcolare una matrice, mentre  $P$  ha componenti abbastanza grandi e trovare

$$\text{re l'inversa è contoso. } M_{B_1, e}(\mathbb{I}) = (M_{e, B_1}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Q = M_{B_1, B_2}(\mathbb{I}) = M_{B_1, e}(\mathbb{I})M_{e, B_2}(\mathbb{I}) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 31 & -1 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Sia  $P^3$  lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado minore di 3 a coefficienti reali e  $F : P^3 \rightarrow P^3$  l'applicazione lineare tale che  $F(X^n) = nX^{n-1}$  (derivata formale). Calcolare nucleo e immagine di  $F$  e trovare  $M_e(F)$  e  $M_b(F)$ , dove  $e$  è la base  $\{1; X; X^2; X^3\}$  e  $b$  è la base  $\{1; 1+X; 1+X+X^2; 1+X+X^2+X^3\}$ .

**SOLUZIONE:**

L'applicazione è definita come  $F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ , quindi affinché  $F(p(x)) = 0$  dobbiamo imporre  $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow$  Il nucleo è costituito dai polinomi costanti, cioè  $\text{Ker}(F) = \mathbb{R}$ ; per l'im-

immagine, notiamo che al variare di  $a_1, a_2, a_3$  si trovano tutti e soli i polinomi di grado due, quindi  $Im(F) = P_2$ . La matrice rispetto alla base

canonica,  $1, x, x^2, x^3$  si calcola facilmente ed è:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Per trova-

re la matrice rispetto alla base  $b$  si può usare la formula del cambiamento di base  $\mathbf{M}_b(F) = (\mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \mathbf{M}_e(F) \mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}) \Rightarrow$

$$\mathbf{M}_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sia  $f$  l'applicazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  cui, rispetto alla base canonica, è asso-

ciata la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$  con  $h \in \mathbb{R}$ .

Trovato il valore di  $h$  per cui  $f$  non è suriettiva:

**SOLUZIONE:**

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che  $f$  non è suriettiva se il rango di  $C$  non è massimo  $\Leftrightarrow \text{Det}(C) = 0$ .

Poiché  $\text{Det}(C) = 3h - 6 \Rightarrow \text{Det}(C) = 0 \Leftrightarrow h = 2$ .

A questo punto sostituiamo il valore di  $h$  trovato nella matrice  $C$ .

- determinare  $Im(f)$ ;

**SOLUZIONE:**

$\dim(Im(f)) = r(C) = 2$  in quanto esiste un minore di ordine due non nullo  $\Rightarrow$  l'immagine è generata da due vettori linearmente indipendenti che vi appartengano, in quanto la dimensione del sottospazio è 2 (va bene qualsiasi coppia di vettori che soddisfano questi due requisiti)  $\Rightarrow Im(f) = \langle (2, 1, -1), (1, 2, 1) \rangle$ .

- determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(1, k^2 - k, k)$  appartiene a  $Im(f)$ ;

**SOLUZIONE:**

Il vettore  $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$  se può essere scritto come combinazione lineare dei vettori che ne costituiscono la base, ossia se è

linearmente dipendente da questi, ossia se:  $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k^2 - k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} =$

$0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$ . Per tali valori di  $k$  il vettore appartiene a  $Im(f)$ .

- trovare un vettore di  $\mathbb{R}^3$  privo di controimmagini;

**SOLUZIONE:**

Basta trovare un vettore di  $\mathbb{R}^3$  che non appartiene a  $Im(f)$ . Sfrutto il punto precedente e sostituisco al vettore un valore di  $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$ ,

sia  $k = 1 \rightarrow$  il vettore  $(1, 0, 1)$  non appartiene all'immagine.

- determinare  $Ker(f)$ ;

**SOLUZIONE:**

$dim(Ker(f)) = 1$  per il teorema di nullità piú rango. Per trovare il vettore che mi genera il nucleo basta risolvere il sistema omogeneo  $Cx = 0$  che ha soluzioni  $(z, -z, z), z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$ .

- verificare che  $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ ;

**SOLUZIONE:**

$Ker(f) \cup Im(f) = x$ , i vettori della base dell'immagine e i vettori della base del nucleo sono linearmente dipendenti tra loro (vedi formula Grassmann vettoriale). In questo caso basta verificare che la

matrice  $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  abbia rango massimo, ossia  $|A| \neq 0$ .

- esistono dei vettori  $u \in \mathbb{R}^3$  tali che  $f(u) = (3, 2, -2)$ ?

**SOLUZIONE:**

Per farlo dobbiamo mostrare che  $(3, 2, 2) \in Im(f)$ , ciò accade se e solo se il vettore può essere scritto come combinazione lineare della base, e quindi è linearmente dipendente da questi. Dunque considero

la matrice  $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , dove i primi due vettori colonna

sono i vettori della base di  $Im(f)$ , mentre l'ultimo è il vettore che devo controllare appartenga all'immagine. Quindi se calcolo  $det(B)$  si presentano due casi:

– se  $det(B) = 0$  il vettore è linearmente dipendente dai vettori che costituiscono la base di  $Im(f)$  e quindi vi appartiene;

– se  $det(B) \neq 0$  il vettore è linearmente indipendente dai vettori della base di  $Im(f)$ , quindi non può essere scritto come loro combinazione lineare (non appartiene all'immagine). In questo caso  $det(B) = 7$ .

- trovare i vettori  $v \in \mathbb{R}^3$  tali che  $f(v) = f(x)$ , dove  $f(x) = (1, 2, -1)$ .

**SOLUZIONE:**

Devo determinare quali sono i vettori  $v = (x, y, z)$  t.c.  $f(v) = (1, 2, -1)$ . Basterà risolvere il sistema lineare  $Cv = (1, 2, -1)$  in quanto le soluzioni di questo sistema individuano tutti i vettori  $v \in \mathbb{R}^3$  che hanno come immagine tramite  $f$  proprio il vettore  $(1, 2, -1)$ . In questo caso il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni del tipo  $(2+t, 1-t, t), t \in \mathbb{R}$ .

7. In  $\mathbb{R}^3$  si consideri l'endomorfismo  $f$  dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

- (a)  $f$  é iniettivo?  $f$  é suriettivo?  
 (b) Trovare  $Ker(f)$  e  $Im(f)$ .  
 (c) Determinare  $\{t \in \mathbb{R} | v = (t+1; 2t; -1) \in Im(f)\}$ .  
 (d) Per il valore di  $t$  ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di  $Im(f)$ .  
 (e) Trovare un vettore  $x$  che non appartenga all'immagine.  
 (f)  $Ker(f)$  e  $Im(f)$  sono in somma diretta?  
 (g) Determinare le controimmagini del vettore  $u = (3; 4; -1)$ .

**SOLUZIONE:**

Risolvendo il sistema proposto nelle variabili  $f(i), f(j), f(k)$  otteniamo le componenti dei vettori immagine della base  $b = \{i, j, k\}$  risp. la stessa base e possiamo quindi scrivere la matrice rappresentativa dell'endomorfismo  $f$  associata a  $b \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(i) = 6i + j + k \\ f(j) = 9i + 3k \\ f(k) = -3i + j - 2k \end{cases}$$

da cui costruiamo la matrice:

$$A = M_b(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a)  $f$  é suriettiva  $\Leftrightarrow \dim(Im(f)) = 3 = r(A)$ . Tuttavia  $Det(A) = 0 \Rightarrow$  Il rango di  $A$  non é massimo, in particolare  $r(A) \neq 3 \Rightarrow f$  non é suriettiva. Inoltre  $\dim(Im(f)) = 2$  (in quanto esiste un minore di ordine due non nullo di  $A$ ), quindi  $\dim(Ker(f)) = 1$ , da cui  $f$  non é iniettiva.

(b) Per costruire una base di  $Im(f)$  basta prendere due vettori che siano lin.ind. e che appartengano all'immagine. Scelgo  $f(i) = f(1, 0, 0) = (6, 1, 1)$  e  $f(j) = f(0, 1, 0) = (9, 0, 3)$ , quindi  $Im(f) = \langle (6, 1, 1), (9, 0, 3) \rangle$ . I vettori appartenenti al nucleo di  $f$  corrispondono alle soluzioni del sistema lineare  $A\underline{x} = \underline{0}$ , con  $\underline{x} = (x, y, z)$  vettore generico. In questo caso le soluzioni sono generate dal vettore  $(-z, z, z), z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ .

(c)  $\underline{v} = (t+1, 2t, -1) \in Im(f) \Leftrightarrow$  può essere scritto come comb.lin. dei vettori che compongono la base di  $Im(f)$ , quindi se é lin. dip. dai due, quindi se:

$$Det \begin{pmatrix} t+1 & 6 & 9 \\ 2t & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0, \text{ cosa che avviene } \Leftrightarrow t = \frac{4}{5}.$$

(d) Sostituendo il valore di  $t$  trovato nel punto precedente troviamo il vettore  $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1)$ . Per calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di  $Im(f)$ .

mi basta trovare  $a, b \in \mathbb{R}$  t.c.  $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1) = a(6, 1, 1) + b(9, 0, 3)$ , da cui otte-

$$\text{niamo il sistema: } \begin{cases} \frac{9}{5} = 6a + 9b \\ \frac{8}{5} = a \\ -1 = a + 3b \end{cases}; \text{ risolvendolo si ricava } a = \frac{8}{5} \text{ e } b = -\frac{13}{15}.$$

(e) Basta sfruttare quanto fatto in precedenza e prendere un valore di  $t$  per cui  $\underline{v} \notin Im(f) \Rightarrow$  Scelgo  $t = 0$ ; ne segue che il vettore  $\underline{x} = (1, 0, -1) \notin Im(f)$ .

(f)  $Ker(f)$  e  $Im(f)$  sono in somma diretta  $\Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \Leftrightarrow$  I vettori della base dell'immagine e quelli della base del kernel sono lin.ind.

$\Leftrightarrow \text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ . Quest'ultima condizione é in effetti verificata e

la somma tra i due sottospazi vettoriali é diretta.

(g) Per vedere quali sono i vettori  $\underline{u}$  t.c.  $f(\underline{u}) = (3, 4, -1)$  noto che essi corrispondono all'insieme delle soluzioni del sistema lineare  $A\underline{x} = (3, 4, -1)$ , il quale però é incompatibile, non ammette soluzioni. Ciò implica che il vettore  $(3, 4, -1) \notin \text{Im}(f)$ .

8. Siano  $v = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$  e  $w = \{(1; 0; 1; 1); (1; 1; 1; 0); (0; 0; 1; 1); (1; 0; 1; 1)\}$  due basi rispettivamente di  $R^3$  e  $R^4$  e  $F, G, H, I$  le seguenti applicazioni lineari:

$$F : R^3 \rightarrow R^3 : F(x; y; z) = (x + z; x + 2y; 2x + 3y + z);$$

$$G : R^3 \rightarrow R^4 : G(x; y; z) = (x + z; x + y + z; x + y + 2z; 2x + y + 2z);$$

$$H : R^4 \rightarrow R^3 : H(x; y; z; t) = (x + 2z + t; x - y - z + t; y - t);$$

$$I : R^4 \rightarrow R^4 : I(x; y; z; t) = (x + z + t; 2x + y + t; x - y - 2z + t; y - z + t).$$

Determinare le matrici associate a tali applicazioni:  $M_v(F)$ ;  $M_{w,v}(G)$ ;  $M_{v,w}(H)$  e  $M_w(I)$ . **SOLUZIONE:**

- La matrice associata a  $F$  rispetto la base canonica é la matrice che ha per colonne i vettori immagine della base canonica, in quanto le componenti di un qualsiasi vettore corrispondono alle sue coordinate rispetto alla base canonica.

$$F(1, 0, 0) = (1, 1, 2);$$

$$F(0, 1, 0) = (0, 2, 3);$$

$$F(0, 0, 1) = (1, 0, 1).$$

$$M_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Analogamente a prima determino i vettori immagine della base  $v$  e poi li esprimo in coordinate rispetto la base  $w$ .

$$G(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x + y + 2z, 2x + y + 2z)$$

$$G(v_1) = (1, 1, 1, 2) = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2 + \frac{2}{3}w_3 + \frac{2}{3};$$

$$G(v_2) = (0, 1, 1, 1) = w_3;$$

$$G(v_3) = (1, 1, 2, 2) = w_1 + w_3.$$

$$\Rightarrow M_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{3}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Se la base d'arrivo é la base canonica metto direttamente i vettori immagine in colonna in quanto le componenti di un vettore sono le sue coordinate in base canonica.

$$H(x, y, z, t) = (x + 2z + t, x - y - z + t, y - t)$$

$$H(w_1) = (4, 1, -1);$$

$$H(w_2) = (3, -1, 1);$$

$$H(w_3) = (3, -1, 0);$$

$$H(w_4) = (2, 1, 0).$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_{v,w}(H) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Per calcolare  $\mathbf{M}_w(I)$ , dove  $I(x, y, z, t) = (x + z + t, 2x + y + t, x - y - 2z + t, y - z + t)$ , applico la seguente:

**FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE:**

Siano  $V$  e  $W$  due  $K$ -spazi vettoriali di dimensione risp.  $n$  e  $m$ ; sia  $f : V \rightarrow W$  applicazione lineare; siano  $v = v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e  $w = w_1, \dots, w_m$  una base di  $W$ ; siano  $e$  e  $E$  basi canoniche risp di  $V$  e  $W \Rightarrow$

$$\mathbf{M}_{w,v}(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1} \mathbf{M}_{E,e}(f) \mathbf{M}_{e,v}(\mathbb{I})$$

In questo caso  $\Rightarrow$

$$\mathbf{M}_w(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1} \mathbf{M}_E(I) \mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$$

Vado quindi a calcolarmi le due matrici che mi interessano:

$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$  é la matrice associata alla f.ne identità che ha come base d'arrivo la base canonica in  $\mathbb{R}^4$ , quindi per ottenerla basterà mettere in colonna le componenti dei vettori della base  $w \Rightarrow$ :

$$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mentre la sua inversa é la matrice :}$$

$$(\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_w(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora basta sostituire nella formula e moltiplicare le matrici!!!