**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di GE110

**A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez**

**Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri**

TUTORATO 10
24 MAGGIO 2013

1. Siano $A$ e $B$ due matrici simili; si dimostri che:

   (a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;

   (b) $tr(A) = tr(B)$;

   (c) $A^n$ e $B^n$ sono simili.

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

3. Data la matrice:
$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$:

   textbf(a) Determinare per quali valori del parametro $a$ la matrice $A$ ammette l'autovalore $\lambda = 1$.
   **(b)** Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di $A$ linearmente indipendenti?

4. Si consideri la matrice simmetrica:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

   $(a)$ Decidere se $A$ è invertibile e, in caso affermativo, determinare $A^{-1}$;
   $(b)$ Calcolare gli autovalori e gli autospazi di $A$;
   $(c)$ Determinare una matrice $P$ tale che $P^{-1}AP = D$, dove $D$ è una matrice diagonale.

5. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se $A$ è diagonalizzabile.

7. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari:
   $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associate, rispettivamente, alle matrici:
   $A = M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
   **(a)** Determinare la dimensione e una base sia per $\ker(gof)$ sia per $\mathrm{Im}(gof)$.
   **(b)** Sia $H$ l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$.
   Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap \ker(gof)$.
   **(c)** Calcolare $(gof)(H)$ e $(gof)^{-1}(K)$, dove $K$ é l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_2 = 0$.

8. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:
   $T(x; y; z; t) = (x + 2y - t; y - 3z; x + 2y + z + t)$.
   **(a)** Scrivere la matrice $A$ che rappresenta $T$ rispetto alle basi canoniche.
   **(b)** Verifica che $C = \{(0; 3; 1); (1; 0; 3); (0; -1; 1)\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$.
   **(c)** Completa i vettori $v = (1; 0; 0; 1)$ e $u = (0; 2; 0; 0)$ a una base $B$ di $\mathbb{R}^4$.
   **(d)** Scrivi la matrice $D$ associata a T rispetto alle basi $C$ e $B$.