**Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di GE110

**A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez**
**Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri**

TUTORATO 11
30 MAGGIO 2013

1. *Secondo esonero a.a. 2011-2012*
Siano $k \in \mathbb{R}$; $v_1 = (1; -1; 0; 0)$; $v_2 = (1; 1; 1; 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che:
$$v_1 \in N(F), \;\; v_2 \in N(F), \;\; F(E_2) = E_2 + kE_4, \;\; F(E_4) = E_2 + v_1$$
dove $\{E_1; E_2; E_3; E_4\}$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $F$.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di $F$. Inoltre, individuato, per un opportuno $k$, un autovalore $\lambda \neq 0$ di $F$ con molteplicitá algebrica diversa da 1, trovare una base per l'autospazio di $F$ associato a $\lambda$.
(c) Determinare i valori di $k$ per cui $F$ é diagonalizzabile.

2. *Secondo esonero a.a. 2004-2005*
Sia $a$ un numero reale, sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$
e siano $v = e_2 - e_3$, $\;w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$.
Sia $F : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare t.c.
$$F(e_1 + v) = w, \;\; F(e_1) = ae_1 + 2e_3, \;\; F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2$$
(a) Determinare una matrice di $F$;
(b) Trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di $F$;
(c) Determinare gli autovalori di $a$ per i quali $F$ é diagonalizzabile.

3. *Secondo esonero a.a. 2003-2004*
Sia $\alpha$ un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che, considerata la base canonica $\{E_1; E_2; E_3; E_4\}$ di $\mathbb{R}^4$, si ha
$$F(E_1) = E_2; \;\; F(E_2) = 2E_2; \;\; F(E_3) = E_1 + E_3; \;\; F(E_4) = E_1 + \alpha E_4$$
(a) Determinare la matrice $A$ di $F$ rispetto alla base canonica;
(b) Trovare, per ogni $\alpha$, basi per gli autospazi di $F$;
(c) Determinare i valori di $\alpha$ per i quali esiste una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$.

4. *Secondo esonero a.a. 2011-2012*
Sia $k \in R$. In uno spazio affine $A$ di dimensione 4 sia $O; e_1; e_2; e_3; e_4$ un

riferimento affine e siano $X; Y; Z; W$ le coordinate. Siano $S$ e $T_k$ i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} 3X + Y = 1 \\ X + Y + Z + W = 0 \end{cases} \qquad T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = 0 \\ kX + kY + Z + W = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la dimensione di $S$ e di $T_k$.
(b) Determinare se esiste un $k$ tale che $S$ e $T_k$ sono paralleli.
(c) Dimostrare che se c'é un iperpiano di $A$ che contiene $S$ e $T_k$ allora $k = 1$.

5. *Secondo esonero a.a. 2002-2003*
In uno spazio affine di dimensione 3 sia $O, e_1, e_2, e_3$ un riferimento affine. Sia $A(0, 0, 2)$ un punto e si considerino le due rette:

$$r_1 : \begin{cases} 3X - Y - 1 = 0 \\ -3X - 2Y + 7 = 0 \end{cases} ; r_2 : \begin{cases} 3X - 4Y - 11 = 0 \\ X - 4Z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?
(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano affine $p$ contenente $r_1$ e parallelo a $r_2$.
(c) Determinare tutti i punti $P \in p$ tali che la retta $PA$ é incidente $r_2$, ma non é incidente $r_1$.

6. *Secondo esonero a.a. 2011-2012*
Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $dimV \geq 2$ e $dimW \geq 2$ e siano $F, G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari tali che $F \neq G$ e $N(F) = N(G)$.
(a) Dimostrare che se $W = Im(F) \oplus Im(G)$ allora $dimW$ é pari e $dimW \leq 2dimV$.
(b) Sia ora $W$ di dimensione dispari. E possibile che $dim(Im(F) \oplus Im(G)) = dimW - 1$?

7. *Secondo esonero a.a. 2003-2004*
Siano $U, V$ e $W$ tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \longrightarrow V$; $F : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari.
(a) Si dimostri che se $FoG$ é suriettiva allora $F$ é suriettiva;
(b) Si supponga ora che $F$ é suriettiva. Si dimostri che $FoG$ é suriettiva se e solo se $N(F) + ImG = V$ ;
(c) si costruisca un esempio esplicito in cui $FoG$ é suriettiva e $N(F) \oplus ImG = V$.