Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 3
20 Marzo 2013

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
   Se possibile si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$
   - $v_1 = (1,3,2),\ v_2 = (2,1,-1),\ v_3 = (1,2,-2)$
   - $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,6),\ v_3 = (2,3,0)$
   - $v_1 = (4,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (4,0,5),\ v_4 = (1,1,0)$
   - $v_1 = (3,-5,2),\ v_2 = (1,3,-1)$

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

3. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
   a)$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \text{ tc } a, b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
   b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
   Si calcoli inoltre la loro dimensione.

4. Si determinino le coordinate dei vettori di
   $v_1 = (3,2,-5),\ v_2 = (1,0,-\frac{1}{2}),\ v_3 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$
   rispetto alle seguenti basi:
   - (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
   - (b) La base $B = \{(1,1,2), (1,0,1), (0,2,1)\}$

5. Dati i seguenti vettori:
   $a := (1;3;2)$
   $b := (-2; k-6; k+4)$
   $c := (-1; k-3; k^2+k+1)$
   $d := (0; -2; k-1)$

   - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a, b, c\}$ sono linearmente indipendenti.

- Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a, b, c\}$.

6. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a := (1, 1, -1)b := (2, -1, 1)$; sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c := (1, 2, -1)d := (-1, -1, 2)$; Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

7. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
$W_1 := \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 tc 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.

   - Si verifichi che W_1 é un sottinsieme vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.

   - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
   $a := (0, 3, 1, -2, 0)$,
   $b := (0, 0, 2, 1, 1)$,
   $c := (0, 6, -10, -10, -6)$,
   $d := (0, 3, 7, 1, 3)$,
   se ne determini una base e la dimensione.

   - Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.

   - Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

8. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
$a := (1, 1, 0)$,
$b := (0, 1, -1)$,
$d := (2, 3, -1)$.
Considerata l'equazione vettoriale:
$x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$
determinare, se possibile, un vettore $c := (x, y, z)$ nei seguenti casi:

   - L'equazione vettoriale non ammette soluzioni;

   - L'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;

   - L'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni.

   - quand' é possibile determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.