

# Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 4

27 MARZO 2013

1. Sia  $k$  un numero reale e si considerino le seguenti coppie di matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino i valori di  $k$  per i quali  $A_i$  può essere trasformata in  $B_i$  con sole operazioni elementari.

(b) Per i valori di  $k$  individuati sopra, si determini una sequenza di trasformazioni elementari che trasformi  $A_i$  in  $B_i$ .

2. Sia  $a$  un numero reale e si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino i valori di  $a$  per i quali  $A$  può essere scritto come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

3. Sia  $h$  un numero reale. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  siano  $U$  il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e  $W_h = \langle (1; 0; 1; 0); (-1; 1; 0; -1); (h; -1; 2; 1) \rangle$ : (a) Determinare le dimensioni di  $U$ ,  $W_h$  e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi;

(b) Determinare le dimensioni di  $W_h + U$  e di  $W_h \cap U$ ;

(c) Determinare se esiste un sottospazio  $V \neq \{0\}$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che:  
 $(W_h + U) \oplus V = \mathbb{R}^4$ .

4. Siano  $k$  un numero reale,  $v_k = (k, k, 0) \in \mathbb{R}^3$ ,  $W \subset \mathbb{R}^3$  il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e  $U_k \subset \mathbb{R}^3$  il sottospazio vettoriale  $U_k = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, k) \rangle$ .

- (a) Si determinino due basi di  $(W + \langle v_k \rangle)$  e  $U_k$ ;  
 (b) Si determinino le dimensioni di  $U_k + (W + v_k)$  e di  $U_k \cap (W + v_k)$ ;  
 (c) Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  per cui  $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$ .

5. Sia  $h$  un numero reale. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  siano  $U$  il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e  $W_h = \langle (1; 1; 1; 1); (0; 1; 0; -1); (2; 3; 2; h) \rangle$ : (a) Determinare le dimensioni di  $U$ ,  $W_h$  e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi;

- (b) Determinare le dimensioni di  $W_h + U$  e di  $W_h \cap U$ ;  
 (c) Determinare se esistono valori di  $h$  per cui  $W_h \oplus U = \mathbb{R}^4$ .

6. Si consideri lo spazio vettoriale  $M_2(\mathbb{R})$  delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Siano:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Sia  $U := \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$ . Si calcoli la dimensione di  $U$ ;  
 (b) Si determini un sottospazio  $W$  di  $M_2(\mathbb{R})$  tale che  $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ ;  
 (c) Sia  $k$  un numero reale e siano  $B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ .

Si determinino, se esistono, i valori di  $k$  per i quali  $\dim(U \cap \langle B_k, C_k \rangle) = 1$ .

7. Al variare dei parametri si considerino i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} kx_1 + hx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + kx_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + kx_2 + hx_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ kx_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 + x_4 = 0 \\ hx_1 + hx_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 - hx_4 = 0 \\ hx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori dei parametri per i quali i sistemi sono o meno compatibili e, in tal caso si calcolino esplicitamente le soluzioni.

8. Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Per ognuna delle matrici si determinino i parametri per i quali sono o meno invertibili e, in tal caso, si calcoli l'inversa.