Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 5
10 Aprile 2013

1. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali
   $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x + 2y = 2t = 0\}$
   $K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$.

   - Determinare la dimensione e una base di H, K, $H + K$ e $H \cap K$

   - Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

   - Provare che i sottoinsiemi:
     $F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}$
     $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = -XA\}$
     sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
   - Determinare una base per i sottospazi vettoriali F, G, $F+G$, $F \cap G$.
   - Data la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$ stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.
   - Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.

3. Siano A e B due matrici quadrate di ordine na coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:

   - $r(A + B) \leq r(A), r(B)$

   - $r(A) = r = r(B) \to r(AB) = r(r < n)$

   - $r(A) = n = r(B) \to r(AB) = n$

   - $r(A) < n; r(B) < n \to r(AB) < n$
     Nel caso siano vere, si esibisca una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare il rango delle matrici A e B al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$
determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

7. Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli di determinino le soluzioni dei seguenti sistemii di equazioni lineari, al variare del parametro reale a.

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=a \\ 3x+ay+z=0 \\ 2ax-ay+z=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ ax+y+az=1 \\ 3x+ay-az=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+az=1 \\ 3x+y+az=a \\ ax+3y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay+az=a \\ ax+y+az=2 \\ ax-ay-az=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=-2 \\ 2x+y+t=-1 \\ -y-2t-2z=2 \\ 3x-3y+z+t=1 \end{cases}$$