Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 9
15 MAGGIO 2013

1. In A^3:

   - Si scriva l'equazione del piano α passante per i punti $A = (1; 0; 0)$; $B = (2; 1; 1)$ e $D = (0; 1; 1)$;
   - Si scriva l'equazione del piano β contenente le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$
   - Si determini se i due piani sono paralleli o incidenti.

2. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}$, con $x, y, z, t \in R$, associata ad un endomorfismo f di R^3 (rispetto alla base canonica).
   É possibile determinare univocamente A sapendo che f non é iniettiva e che: $f(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2)$?

3. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Calcolare $Dim(Ker(f))$ e $Dim(Im(f))$.

4. In R^3 si considerino le basi: $B_1 = \{(1; 1; 1); (0; 2; 3); (1; 0; 3)\}$; $B_2 = \{(4; 3; 1); (0; 1; 2); (1; 0; 1)\}$.
   Determinare la matrice P del cambiamento di base da B_1 a B_2.
   Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_2 a B_1.

5. Sia P^3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado minore di 3 a coefficienti reali e $F : P^3 \to P^3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = nX^{n-1}$ (derivata formale). Calcolare nucleo e immagine di F e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e é la base $\{1; X; X^2; X^3\}$ e b é la base $\{1; 1 + X; 1 + X + X^2; 1 + X + X^2 + X^3\}$.

6. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, é associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:
   - determinare $Im(f)$;
   - determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
   - trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   - determinare $Ker(f)$;
   - verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
   - esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$?
   - trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1, 2, -1)$.

7. In R^3 si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

(a) f é iniettivo? f é suriettivo?
(b) Trovare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
(c) Determinare $\{t \in R | v = (t+1; 2t; -1) \in Im(f)\}$.
(d) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$.
(e) Trovare un vettore x che non appartenga all'immagine.
(f) $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta?
(g) Determinare le controimmagini del vettore $u = (3; 4; -1)$.

8. Siano $v = \{(1;0;0); (0;1;0); (0;0;1)\}$ e $w = \{(1;0;1;1); (1;1;1;0); (0;0;1;1); (1;0;1;1)\}$ due basi rispettivamente di R^3 e R^4 e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : R^3 \to R^3 : F(x;y;z) = (x+z; x+2y; 2x+3y+z)$;
$G : R3 \to R^4 : G(x;y;z) = (x+z; x+y+z; x+y+2z; 2x+y+2z)$;
$H : R^4 \to R^3 : H(x;y;z;t) = (x+2z+t; x-y-z+t; y-t)$;
$I : R^4 \to R^4 : I(x;y;z;t) = (x+z+t; 2x+y+t; x-y-2z+t; y-z+t)$.
Determinare le matrici associate a tali applicazioni: $M_v(F); M_{w;v}(G); M_{v;w}(H)$ e $M_w(I)$.