UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 10-7-2014

TESTO E SOLUZIONI

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Siano a e b due numeri reali. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} X_2 - X_3 + aX_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = a \\ aX_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_3 + bX_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di a e b per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - aR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1-a & -1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - aR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & b+1+a^2 & 1+a^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che $1 + a^2 \neq 0$, si vede subito che il sistema è incompatibile se $b = -1 - a^2$.
Se invece $b \neq -1 - a^2$ il sistema è a gradini e si calcolano facilmente le soluzioni

$$X_4 = \frac{1+a^2}{b+1+a^2},\ X_3 = \frac{-ba^2+1+a^2}{b+1+a^2},\ X_2 = \frac{-a^3-ba^2+1+a^2-a}{b+1+a^2},\ X_1 = \frac{ab}{b+1+a^2}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE (COME SCRITTO):

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

pertanto $r(A) \geq 3$. Inoltre si calcola facilmente che $\det(A) = -a^2 - b - 1$ e quindi

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } b = -1-a^2 \\ 4 & \text{se } b \neq -1-a^2 \end{cases}.$$

Considerato il seguente minore della matrice orlata

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1 \neq 0$$

deduciamo che $r(A\ b) = 4$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e pertanto che $r(A) = r(A\ b)$ se e solo se $b \neq -1-a^2$. Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $b \neq -1-a^2$ e possiamo calcolare la soluzione con la regola di Cramer. Si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{ab}{b+1+a^2},\ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & a \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-a^3-ba^2+1+a^2-a}{b+1+a^2},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-ba^2+1+a^2}{b+1+a^2},\ X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1+a^2}{b+1+a^2}. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = M_2(\mathbb{R})$, lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Calcolare la dimensione di U.

(b) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio $W \neq \{0\}$ di V tale che

$$U \oplus W = V$$

e scrivere esplicitamente una base di W.

(c) Siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim U \cap < B_k, C_k >= 2.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE (COME RECUPERO DEL I ESONERO e COME SCRITTO):

(a) Per calcolare la dimensione di U osserviamo che, attraverso l'isomorfismo $\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R})$, si ha che U è isomorfo al sottospazio

$$< (1,0,0,k), (2,1,k,2), (3,1,0,2), (1,0,k,k^2) >$$

di $\mathbb{R}^4$. Pertanto facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 1 & k & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k & k^2 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 2-2k \\ 0 & 1 & 0 & 2-3k \\ 0 & 0 & k & k^2-k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 2-2k \\ 0 & 0 & -k & -k \\ 0 & 0 & k & k^2-k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si ha $r(A) = 2$, quindi $\dim U = 2$.
Se invece $k \neq 0$ facciamo le operazioni $R_3 \to \frac{1}{k}R_3, R_4 \to \frac{1}{k}R_4$ ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 2-2k \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_3$, si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 2-2k \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 2$ si ha $r(A) = 3$, quindi $\dim U = 3$.
Se invece $k \neq 0, 2$ si ha $r(A) = 4$, quindi $\dim U = 4$. Pertanto

$$\dim U = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k = 2 \\ 4 & \text{se } k \neq 0, 2 \end{cases}.$$

Notiamo in particolare che, se $k \neq 0, 2$, allora $U = V$, mentre, dai calcoli precedenti si deduce che se $k = 0$ si ha $U =< D_1, D_2 >$, dove

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e se $k=2$ si ha $U=<E_1,E_2,E_3>$, dove

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&-2\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

(b) Per quanto detto sopra, W non esiste se $k\neq 0,2$.
Se $k=2$ sia $W=<B>$ dove $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Dato che il rango di

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&-2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

è 4, si ottiene $U\oplus W=V$.
Se $k=0$ sia $W=<B,C>$ dove $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Dato che il rango di

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

è 4, si ottiene $U\oplus W=V$.
Si conclude che W esiste se e solo se $k=0,2$.
(c) Osserviamo intanto che

$$\dim<B_k,C_k>=r(\begin{pmatrix}1&k&0&0\\k&0&0&k\end{pmatrix})=\begin{cases}1&\text{se } k=0\\2&\text{se } k\neq 0\end{cases}.$$

Quindi se $k\neq 0,2$ si ha, essendo $U=V$, $\dim U\cap<B_k,C_k>=\dim<B_k,C_k>=2$.
Se $k=0$, essendo $U\cap<B_0,C_0>\subseteq<B_0,C_0>$, si ha

$$\dim U\cap<B_0,C_0>\leq\dim<B_0,C_0>=1.$$

Se $k=2$ calcoliamo la dimensione di $U+<B_2,C_2>$, ovvero il rango di

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&-2\\0&0&-1&-1\\1&2&0&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_4 \to R_4 - R_1, R_5 \to R_5 - 2R_1$, si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 4. Dunque $\dim(U+ < B_2, C_2 >) = 4$ e la formula di Grassmann da

$$\dim(U\cap < B_2, C_2 >) = \dim U + \dim < B_2, C_2 > - \dim(U+ < B_2, C_2 >) = 1.$$

Si conclude che $\dim U\cap < B_k, C_k >= 2$ se e solo se $k \neq 0, 2$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari.
(b) Per i valori di k individuati sopra, determinare una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Prima facciamo operazioni elementari su B.
Scambiando R_1 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque B ha rango 3 e quindi è invertibile, dunque può essere trasformata in I_3 con sole operazioni elementari. Pertanto A sarà trasformabile in B con sole operazioni elementari esattamente per i valori di k per i quali A è invertibile.
Prima trasformiamo B in I_3.

Con le operazioni $R_3 \to \frac{1}{2}R_3, R_2 \to -R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 + R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - 2R_2$ da I_3.
Ora facciamo operazioni elementari su A.
Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$, si ottiene la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si vede che $r(A) = r(C) = 2$ e pertanto A non può essere trasformata in B con sole operazioni elementari.
Invece, se $k \neq 0$, C è a gradini, dunque $r(C) = 3$ e sarà possibile trasformare A in B con sole operazioni elementari.
(b) Sia $k \neq 0$ e trasformiamo prima C in I_3.
Con le operazioni $R_2 \to \frac{1}{k}R_2, R_3 \to -R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 - 2R_3, R_2 \to R_2 + \frac{1}{k}R_3$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da I_3. Per arrivare a B, partendo da I_3, invertiamo le operazioni fatte per B. Con l'operazione $R_1 \to R_1 + 2R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to 2R_3, R_2 \to -R_2$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e infine scambiando R_1 con R_3 si trova B. $\blacksquare$

4. Siano $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,0,0,2) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_2) = kE_2, F(E_4) = E_1 - 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice A di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $M \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, E_2, E_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Dalle condizioni soddisfatte da F si deduce che

$$F(v_1) = v_1, F(v_2) = v_2, F(E_2) = kE_2.$$

Inoltre occorre esprimere $F(E_4)$ nella base e. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$E_1 - 2E_3 = av_1 + bv_2 + cE_2 + dE_4$$

ovvero

$$E_1 - 2E_3 = a(E_1 + E_3) + b(-E_1 + 2E_4) + cE_2 + dE_4$$

da cui si deduce il sistema

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ c = 0 \\ a = -2 \\ 2b + d = 0 \end{cases}$$

e pertanto $a = -2, b = -3, c = 0, d = 6$, da cui

$$F(E_4) = -2v_1 - 3v_2 + 0E_2 + 6E_4$$

e quindi

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1-T & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-T \end{vmatrix} = (T-1)^2(T-k)(T-6)$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq 1, 6$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 6$ (m.a. 1), $\lambda_3 = k$ (m.a. 1)
$k = 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 6$ (m.a. 1)
$k = 6$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 6$ (m.a. 2)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 1$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2w = 0 \\ -3w = 0 \\ (k-1)z = 0 \\ 5w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $z = w = 0$ se $k \neq 1$ e $w = 0$ se $k = 1$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$ se $k \neq 1$ e $xv_1 + yv_2 + zE_2$ se $k = 1$ e una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ se $k \neq 1$, $\{v_1, v_2, E_2\}$ se $k = 1$.

Allora, a parte i casi di molteplicità algebrica 1, nei quali, come sappiamo, anche la molteplicità geometrica è 1, ci resta solo da considerare il caso $k = 6$. Posto $T = 6$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 6I_4 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, da cui $\dim V_6(F) = 4 - 2 = 2$ in questo caso.

(c) Osserviamo intanto che esiste una matrice $M \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$ se e solo se F è diagonalizzabile.

Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq 1, 6$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
6	1	1
k	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $k = 1$

autovalore	m.g.	m.a.
1	3	3
6	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

3) $k = 6$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
6	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile per ogni k. $\blacksquare$

5. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia A uno spazio affine di dimensione 4 su uno spazio vettoriale reale V con un riferimento affine Oe_1, e_2, e_3, e_4. Siano H l'iperpiano di equazione $X_1 - kX_2 + X_4 = 0$ e q il piano di equazioni $\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + kX_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare (se esistono) tutti i piani p di A tali che p è parallelo a H e p è parallelo a q.

(b) Determinare (se esistono) tutti i piani $p \not\subset H$ tali che p è parallelo a q.

(c) Determinare (se esistono) tutti i piani $p \subset H$ tali che p passa per i punti $P_1(0,0,1,0)$, $P_2(-1,0,0,1)$ e p non interseca q.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di q è data dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + kX_4 = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $X_1 = -kX_4, X_3 = k(X_2 + X_4)$. Pertanto i vettori della giacitura di S sono tutti del tipo

$$-kX_4e_1 + X_2e_2 + k(X_2 + X_4)e_3 + X_4e_4 = X_2(e_2 + ke_3) + X_4(-ke_1 + ke_3 + e_4)$$

da cui $giac(q) =< e_2 + ke_3, -ke_1 + ke_3 + e_4 >$. Dato che p e q hanno la stessa dimensione, affinché sia $p \parallel q$ si deve avere $giac(p) = giac(q)$. Affiché sia $p \parallel H$ occorre che $(0, 1, k, 0)$ e $(-k, 0.k.1)$ siano soluzioni del sistema che rappresenta la giacitura di H, ovvero di

$$\{ X_1 - kX_2 + X_4 = 0$$

e quindi deve essere

$$-k = 0 \text{ e } -k + 1 = 0$$

che è impossibile. Dunque non esistono piani p di A tali che p è parallelo a H e p è parallelo a q.

(b) Sia $Q = Q(a,b,c,d)$ un qualsiasi punto di A e sia $U = giac(q)$. I piani p paralleli a q sono i sottospazi $p = S_{Q,U}$. Se fosse $p \subset H$ si avrebbe in particolare $p \parallel H$, che è escluso dalla (a). Dunque ogni piano p parallelo a q è tale che $p \not\subset H$. Al variare del punto Q si ottengono tutti tali p.

(c) Un piano $p \subset H$ ha equazioni cartesiane

$$p : \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_4 = 0 \\ aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = e \end{cases}$$

per $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tali che

$$r(\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}) = 2.$$

Dato che p passa $P_1(0,0,1,0)$ e $P_2(-1,0,0,1)$ si deducono le condizioni

$$c = e, -a + d = e$$

da cui abbiamo $e = c, d = a + c$ e le equazioni di p sono

$$p : \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_4 = 0 \\ aX_1 + bX_2 + cX_3 + (a+c)X_4 = c \end{cases}.$$

Intersecando p con q si ottiene il sistema

$$p \cap q : \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_4 = 0 \\ aX_1 + bX_2 + cX_3 + (a+c)X_4 = c \\ X_1 - kX_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + kX_4 = 0 \end{cases}$$

che vogliamo sia incompatibile. Dunque applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & a+c & c \\ 1 & -k & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - aR_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - R_1$, si ottiene la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b+ak & c & c & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & c & c & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che deve essere $b = 0$, altrimenti il sistema è a gradini, dunque compatibile. Ora il sistema associato è

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ cX_3 + cX_4 = c \\ X_3 - X_4 = 2 \\ -X_4 = 0 \end{cases} \text{ovvero} \begin{cases} X_1 = 0 \\ cX_3 = c \\ X_3 = 2 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

che è incompatibile se e solo se $c \neq 0$. Notiamo anche che

$$r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & a+c \end{pmatrix}) = 2.$$

Se $k \neq 0$, con l'operazione $R_4 \to \frac{1}{k}R_4$ su M si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b+ak & c & c & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{k} & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_4 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & b+ak & c & c & c \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - (b+ak)R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & c & c-b+\frac{b}{k}-ak+a & c \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - cR_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2c-b+\frac{b}{k}-ak+a & -c \end{pmatrix}$$

che è incompatibile se e solo se $c \neq 0, 2c - b + \frac{b}{k} - ak + a = 0$, ovvero se e solo se

$$c = \frac{b}{2} - \frac{b}{2k} + \frac{ak}{2} - \frac{a}{2} \neq 0.$$

Notiamo anche che

$$r(\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 \\ a & b & \frac{b}{2}-\frac{b}{2k}+\frac{ak}{2}-\frac{a}{2} & \frac{b}{2}-\frac{b}{2k}+\frac{ak}{2}+\frac{a}{2} \end{pmatrix}) = 2.$$

Si conclude che i piani $p \subset H$ tali che p passa per i punti $P_1(0,0,1,0)$, $P_2(-1,0,0,1)$ e p non interseca q, hanno le seguenti equazioni:

• se $k = 0$:

$$p: \begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ aX_1 + cX_3 + (a+c)X_4 = c \end{cases} \quad \forall a, c \in \mathbb{R} \text{ tali che } c \neq 0;$$

• se $k \neq 0$ (moltiplicando la seconda equazione per 2):

$$p: \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_4 = 0 \\ 2aX_1 + 2bX_2 + (b - \frac{b}{k} + ak - a)X_3 + (a + b - \frac{b}{k} + ak)X_4 = b - \frac{b}{k} + ak - a \end{cases}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tali che } b - \frac{b}{k} + ak - a \neq 0. \quad \blacksquare$$

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare e siano $A, B \in M_n$ due matrici di ranghi a e b rispettivamente.
(a) Dimostrare, senza usare il rango di F, che se esistono due basi $e = \{e_1, \ldots, e_n\}, f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ di V tali che A è la matrice di F nella base e e B è la matrice di F nella base f, allora $a = b$.
(b) Supponiamo ora che $a = b$. Esistono sempre due basi e, f di V tali che A è la matrice di F nella base e e B è la matrice di F nella base f? Se sì, dimostrarlo, se no, fornire un esempio.

SOLUZIONE:

(a) Ricordiamo che, come visto a lezione, due matrici A e B sono simili se e solo se esiste un'applicazione lineare $F : V \to V$ ed esistono due basi $e = \{e_1, \ldots, e_n\}, f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ di V tali che $A = M_e(F)$ e $B = M_f(F)$.
Dunque nell'ipotesi (a) abbiamo che A e B sono simili, cioè esiste $M \in GL_n$ tale che $A = M^{-1}AM$. Ma sappiamo anche che moltiplicare a destra o a sinistra per una matrice invertibile non cambia il rango, dunque $a = b$.
(b) Per quanto detto in (a) basta esibire due matrici che hanno lo stesso rango ma non sono simili, per esempio che hanno autovalori diversi. Dunque per esempio prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$