UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 10-7-2014

TESTO

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Siano a e b due numeri reali. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} X_2 - X_3 + aX_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = a \\ aX_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_3 + bX_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di a e b per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = M_2(\mathbb{R})$, lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Calcolare la dimensione di U.

(b) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio $W \neq \{0\}$ di V tale che

$$U \oplus W = V$$

e scrivere esplicitamente una base di W.

(c) Siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che

$$\dim U \cap < B_k, C_k >= 2.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari.

(b) Per i valori di k individuati sopra, determinare una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_2) = kE_2, F(E_4) = E_1 - 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice A di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali esiste una matrice $M \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia A uno spazio affine di dimensione 4 su uno spazio vettoriale reale V con un riferimento affine Oe_1, e_2, e_3, e_4. Siano H l'iperpiano di equazione $X_1 - kX_2 + X_4 = 0$ e q il piano di equazioni $\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + kX_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare tutti i piani p di A tali che p è parallelo a H e p è parallelo a q.

(b) Determinare tutti i piani $p \not\subset H$ tali che p è parallelo a q.

(c) Determinare tutti i piani $p \subset H$ tali che p passa per i punti $P_1(0, 0, 1, 0), P_2(-1, 0, 0, 1)$ e p non interseca q.

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare e siano $A, B \in M_n$ due matrici di ranghi a e b rispettivamente.

(a) Dimostrare, senza usare il rango di F, che se esistono due basi $e = \{e_1, \ldots, e_n\}, f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ di V tali che A è la matrice di F nella base e e B è la matrice di F nella base f, allora $a = b$.
(b) Supponiamo ora che $a = b$. Esistono sempre due basi e, f di V tali che A è la matrice di F nella base e e B è la matrice di F nella base f? Se no, fornire un esempio.