UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 12-6-2014

TESTO E SOLUZIONI

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ 2X_1 + kX_2 - X_3 = k \\ X_1 - X_2 + kX_3 = 1 \\ -kX_2 + X_3 = -k-2 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & k & 0 \\ 2 & k & -1 & k \\ 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 2 & k & -1 & k \\ k & -1 & k & 0 \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & k+2 & -1-2k & k-2 \\ 0 & -1+k & k-k^2 & -k \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_2 \to R_2 + R_4$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 2 & -2k & -4 \\ 0 & -1+k & k-k^2 & -k \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -k & -2 \\ 0 & -1+k & k-k^2 & -k \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 + (1-k)R_2, R_4 \to R_4 + kR_2$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -3k-2 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -k & -2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -3k-2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Dunque si vede subito che il sistema è incompatibile se $k \neq 2$.

Supponiamo $k = 2$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora il sistema è a gradini ed ha come soluzioni

$$X_3 = \frac{8}{3},\ X_2 = \frac{10}{3},\ X_1 = -1. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE (COME SCRITTO):

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & k \\ 2 & k & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, dunque $r(A) \geq 2$. Inoltre

$$\begin{vmatrix} k & -1 & k \\ 2 & k & -1 \\ 0 & -k & 1 \end{vmatrix} = 2(1-k^2), \quad \begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 0 & -k & 1 \end{vmatrix} = 2(k^2-1)$$

pertanto, per il principio dei minori orlati, $r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq \pm 1 \\ 2 & \text{se } k = \pm 1 \end{cases}$.
Ora calcoliamo il rango di

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} k & -1 & k & 0 \\ 2 & k & -1 & k \\ 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} k & -1 & k & 0 \\ 2 & k & -1 & k \\ 1 & -1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 & -k-2 \end{vmatrix} = -2(k-2)(k^2-1)$$

e

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -k-2 \end{vmatrix} = -2(k^2+2k+2) \neq 0 \text{ per ogni k.}$$

e quindi $r(A\ b) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 2, \pm 1 \\ 3 & \text{se } k = 2, \pm 1 \end{cases}$.
Ne segue che $r(A) = r(A\ b)$ se e solo se $k = 2$. Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k = 2$ e possiamo calcolare la soluzione con la regola di Cramer. Scegliendo il minore

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = -1, \ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{10}{3}, \ X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{8}{3}. \ \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,k), v_3 = (k,k,1), v_4 = (1,k,k),$$

$$U = < v_1, v_2, v_3 > \text{ e } W = U + < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$;

(c) Determinare se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$(U \cap W) \oplus < v_1 - v_4, v_4 >= V.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE (COME RECUPERO DEL I ESONERO e COME SCRITTO):

(a) Per calcolare la dimensione di U facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$, si trova

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 - k^2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $\dim U = \begin{cases} 2 & \text{se } k = \pm 1 \\ 3 & \text{se } k \neq \pm 1 \end{cases}.$

Notiamo in particolare che, se $k \neq \pm 1$, allora $U = V$, mentre se $k = \pm 1$, allora $U =< v_1, v_2 >$.

Per calcolare la dimensione di W osserviamo intanto che, essendo $v_3 \in U$, si ha $W = U+ < v_4 >$. Inoltre $U \subseteq W$, dunque $W = V$ se $k \neq \pm 1$. Se invece $k = \pm 1$ dobbiamo solo verificare se $v_4 \in U$ e quindi, usando la matrice A, facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-k^2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $v_4 \in U$ se e solo se $k - k^2 = 0$, cioè se e solo se $k = 1$ (ricordando che siamo nel caso $k = \pm 1$). Quindi $\dim W = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$.

(b) Dato che $U \subseteq W$ si ha banalmente $U \cap W = U$ e quindi $\dim(U \cap W) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = \pm 1 \\ 3 & \text{se } k \neq \pm 1 \end{cases}$.

Per lo stesso motivo $U + W = W$, dunque $\dim(U + W) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$.

(c) Osserviamo che $v_1 \in U = U \cap W$. Inoltre $v_1 = (v_1 - v_4) + v_4 \in < v_1 - v_4, v_4 >$. Dunque $v_1 \in (U \cap W) \cap < v_1 - v_4, v_4 >$. Dato che $v_1 \neq 0$ ne segue che la somma $(U \cap W) + < v_1 - v_4, v_4 >$ non può mai essere diretta. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & k^2 & k^2 \\ 0 & 2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Si consideri una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. È possibile che la stessa sequenza trasformi $A - \sqrt{2}I_3$ in $2I_3$?

SOLUZIONE:

(a) Facciamo operazioni elementari su A.

Con l'operazione $R_2 \to R_2 + R_1$ si trova la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k^2-1 & k^2-1 \\ 0 & 2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Se $k = \pm 1$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pertanto $r(A) = 2$ e quindi A non è prodotto di matrici elementari.

Assumiamo ora $k \neq \pm 1$.

Con l'operazione (su B), $R_2 \to \frac{1}{k^2-1} R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k^2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$ si ha

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto se $k = \pm\sqrt{2}$ si ha che $r(A) = 2$ e quindi A non è prodotto di matrici elementari.
Assumiamo quindi $k \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$.
Con l'operazione (su C), $R_3 \to \frac{1}{k^2-2} R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_3, R_1 \to R_1 + R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ da I_3.
Pertanto A è prodotto di matrici elementari se e solo se $k \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$.
Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, abbiamo allora che

$$R_{12}(1)R_{13}(1)R_{23}(-1)R_3(\frac{1}{k^2-2})R_{32}(-2)R_2(\frac{1}{k^2-1})R_{21}(1)A = I_3$$

da cui

$$A = R_{21}(1)^{-1}R_2(\frac{1}{k^2-1})^{-1}R_{32}(-2)^{-1}R_3(\frac{1}{k^2-2})^{-1}R_{23}(-1)^{-1}R_{13}(1)^{-1}R_{12}(1)^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{21}(-1)R_2(k^2-1)R_{32}(2)R_3(k^2-2)R_{23}(1)R_{13}(-1)R_{12}(-1).$$

(b) Se esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3 e anche $A - \sqrt{2}I_3$ in $2I_3$, allora, tenendo conto che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, esiste una matrice R, prodotto di matrici elementari, tale che

$$RA = I_3 \text{ e } R(A - \sqrt{2}I_3) = 2I_3.$$

Ma allora $I_3 - \sqrt{2}R = 2I_3$, da cui $R = -\frac{1}{\sqrt{2}}I_3$ e quindi $I_3 = RA = -\frac{1}{\sqrt{2}}A$, che dà la contraddizione $A = -\sqrt{2}I_3$. ■

4. Sia k un numero reale e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1 + E_3) = -E_1 + kE_2, \quad F(E_2 + E_3) = (2 + k)E_2 + 2E_4,$$

$$F(E_2 - E_3) = (2 - k)E_2 + 2E_3 + 2E_4, \quad F(E_4) = (1 - k)E_4,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Dalle due equazioni

$$F(E_2 + E_3) = (2 + k)E_2 + 2E_4, F(E_2 - E_3) = (2 - k)E_2 + 2E_3 + 2E_4$$

sommando e dividendo per 2 si ottiene $F(E_2) = 2E_2 + E_3 + 2E_4$, mentre facendo la differenza e dividendo per 2 si ottiene $F(E_3) = kE_2 - E_3$. Da $F(E_1 + E_3) = -E_1 + kE_2$ si deduce che $F(E_1) = -E_1 + E_3$. Pertanto, nella base canonica $e = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ si ha

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-k \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico di F quindi è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-T & k & 0 \\ 1 & 1 & -1-T & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-k-T \end{vmatrix} = (-1-T)(1-k-T)\big[(2-T)(-1-T)-k\big] =$$

$$= (T + 1)(T + k - 1)(T^2 - T - 2 - k)$$

L'equazione $(T+1)(T+k-1)(T^2-T-2-k) = 0$ ha per soluzioni $-1, 1-k$ e, se $k \geq -\frac{9}{4}$, $\frac{1\pm\sqrt{4k+9}}{2}$.

Osserviamo ora che $-1 = 1 - k$ se e solo se $k = 2$; $-1 = \frac{1\pm\sqrt{4k+9}}{2}$ se e solo se si sceglie il $-$ e $k = 0$ (notando che $0 \geq -\frac{9}{4}$); $1 - k = \frac{1\pm\sqrt{4k+9}}{2}$ se e solo se si sceglie il $-$ e $k = 1 + \sqrt{3}$ oppure si sceglie il $+$ e $k = 1 - \sqrt{3}$ (notando che $1 \pm \sqrt{3} \geq -\frac{9}{4}$).

Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < -\frac{9}{4}$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 - k$ (m.a. 1)
$k > -\frac{9}{4}, k \neq 0, 2, 1 \pm \sqrt{3}$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 - k$ (m.a. 1)
	$\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{4k+9}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$ (m.a. 1)
$k = -\frac{9}{4}$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = \frac{13}{4}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 1)
$k = 1 - \sqrt{3}$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \sqrt{3}$ (m.a. 2)
$k = 1 + \sqrt{3}$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ (m.a. 2)
$k = 2$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ (m.a. 1)

Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = -\frac{9}{4}$, posto $T = \frac{1}{2}$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - \frac{1}{2}I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{\frac{1}{2}}(F) = 4 - 3 = 1$.
Se $k = 1 \pm \sqrt{3}$, posto $T = \mp\sqrt{3}$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) \pm \sqrt{3}I_4 = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \pm \sqrt{3} & 1 \pm \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \pm \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{\mp\sqrt{3}}(F) = 4 - 3 = 1$.
Se $k = 2$, posto $T = -1$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{-1}(F) = 4 - 3 = 1$.
Se $k = 0$, prendiamo $\lambda_1 = -1$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_{-1}(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore -1 sono soluzioni del

sistema $(M_e(F) + I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2y + w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = y = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo zE_3 e una base di $V_{-1}(F)$ è $\{E_3\}$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k < -\frac{9}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$1-k$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k > -\frac{9}{4}, k \neq 0, 2, 1 \pm \sqrt{3}$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$1-k$	1	1
$\frac{1-\sqrt{4k+9}}{2}$	1	1
$\frac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

3) $k = -\frac{9}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$\frac{13}{4}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	2
1	1	1
2	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

5) $k = 1 - \sqrt{3}$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$1 - \sqrt{3}$	1	1
$\sqrt{3}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

6) $k = 1 + \sqrt{3}$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$1 + \sqrt{3}$	1	1
$-\sqrt{3}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

7) $k = 2$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	2
$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$	1	1
$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > -\frac{9}{4}, k \neq 0, 2, 1 \pm \sqrt{3}$. ∎

5. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia

p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X + Z = 2$ e si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} X = 2 + t \\ Y = 1 - t \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X + Y + 3Z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a r_1 e p non è parallelo a r_2.

(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a r_2 e p contiene r_1.

(c) Determinare tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tali che r è parallela a p_1 ed incidente a r_1 e r_2.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di r_1 è $< e_1 - e_2 + e_3 >$, mentre quella di r_2 si ottiene dai minori 2 per 2 a segni alterni di

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cioè $\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4, -2, 2)$. Quindi, dividendo per -2,

$$giac(r_2) =< 2e_1 + e_2 - e_3 > .$$

Sia $AX + BY + CZ + D = 0$ l'equazione di p in modo che la sua giacitura è data dalle soluzioni di $AX + BY + CZ = 0$. Quindi p è parallelo a r_1 se e solo se $(1, -1, 1)$ soddisfa tale sistema, cioè $A - B + C = 0$, ovvero $C = B - A$. Analogamente p non è parallelo a r_2 se e solo se $(2, 1, -1)$ non soddisfa tale sistema, cioè $2A + B - C \neq 0$, ovvero, sostituendo $C = B - A$, se e solo se $A \neq 0$.

Allora i piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a r_1 e p non è parallelo a r_2 sono tutti e soli quelli di equazione

$$AX + BY + (B - A)Z + D = 0 \text{ con } A \neq 0.$$

(b) Sia ancora $AX + BY + CZ + D = 0$ l'equazione di p in modo che, come sopra, p è parallelo a r_2 se e solo se $2A + B - C = 0$, ovvero se e solo se $C = 2A + B$. Affichè sia r_1 contenuta in p, deve essere r_1 parallela a p, quindi, come sopra, $C = B - A$ e $r_1 \cap p \neq \emptyset$, quindi deve esistere $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(1) \qquad A(2 + t) + B(1 - t) + Ct + D = 0.$$

Ora da $C = 2A + B = B - A$ si trova $A = 0, C = B$ e sostituendo in (1) si ottiene $B + D = 0$, cioè $D = -B$. Allora l'equazione di p è $BY + BZ - B = 0$, ovvero, considerato che B non può essere 0, l'equazione di p è $Y + Z - 1 = 0$.

(c) Scriviamo prima le equazioni parametriche di r_2. Ponendo $Z = u$ si ottiene $X = \frac{1}{2} - 2u, Y = \frac{1}{2} - u$. Osserviamo anche che $r_1 \cap r_2 = \emptyset$: le intersezioni si hanno per $\frac{1}{2} - 2u = 2 + t, \frac{1}{2} - u = 1 - t, u = t$, che non ha soluzioni. Ora la retta r dovrà intersecare r_1 in un punto $P_1(2 + t, 1 - t, t)$ e r_2 in un punto $P_2(\frac{1}{2} - 2u, \frac{1}{2} - u, u)$. Inoltre r non potrà essere parallela né a r_1 né a r_2 dato che $r_1 \cap r_2 = \emptyset$: per esempio se r fosse parallela a r_1, dato che la interseca, si avrebbe $r = r_1$, ma allora $P_2 \in r_1 \cap r_2$. Analogamente r non è parallela a r_2. Allora, per concludere, basta imporre che r è parallela a p_1. La giacitura di r è dunque data da

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-\frac{3}{2} - 2u - t)e_1 + (-\frac{1}{2} - u + t)e_2 + (u - t)e_3.$$

Ne segue che r è parallela a p_1 se e solo se $(-\frac{3}{2} - 2u - t, -\frac{1}{2} - u + t, u - t)$ è soluzione di $X + Z = 0$, ovvero se e solo se

$$-\frac{3}{2} - u - 2t = 0$$

cioè se e solo se $u = -\frac{3}{2} - 2t$. Quindi, sostituendo, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} X = 2 + t + v(\frac{3}{2} + 3t) \\ Y = 1 - t + v(1 + 3t) \\ Z = t + v(-\frac{3}{2} - 3t) \end{cases}, v \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

6. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali tali che $\dim V < \dim U$. Siano $F : V \to W$ e $G : W \to U$ due applicazioni lineari tali che $Im(F) \oplus N(G) = W$.

(a) Dimostrare che G non è suriettiva;

(b) Costruire un esempio esplicito di tali spazi ed applicazioni con $\dim W \geq 2, \dim V \geq 2$.

SOLUZIONE:

(a) Per il teroema di rango-nullità si ha $n(F) + r(F) = \dim V$ e $n(G) + r(G) = \dim W$. Inoltre, per ipotesi si ha $r(F) + n(G) = \dim W$. Quindi

$$r(G) = \dim W - n(G) = r(F) = \dim V - n(F) \leq \dim V < \dim U$$

e quindi G non può essere suriettiva.

(b) Sia V un qualsiasi spazio di dimensione 2 con base $\{v_1, v_2\}$, $W = V$ e sia U uno spazio di dimensione 3 con base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Sia $F = id_V$ e $G : W \to U$ l'unica applicazione lineare tale che $G(v_1) = u_1, G(v_2) = u_2$. Allora $Im(F) = W$ e $N(G) = \{0\}$ quindi ovvimente $Im(F) \oplus N(G) = W$. $\blacksquare$