UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 12-6-2014

TESTO

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ 2X_1 + kX_2 - X_3 = k \\ X_1 - X_2 + kX_3 = 1 \\ -kX_2 + X_3 = -k - 2 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, k), v_3 = (k, k, 1), v_4 = (1, k, k),$$

$$U =< v_1, v_2, v_3 > \text{ e } W = U+ < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$;

(c) Determinare se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$(U \cap W) \oplus < v_1 - v_4, v_4 >= V.$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & k^2 & k^2 \\ 0 & 2 & k^2 \end{pmatrix}.$$
(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Si consideri una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. È possibile che la stessa sequenza trasformi $A - \sqrt{2}I_3$ in $2I_3$?

4. Sia k un numero reale e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che
$$F(E_1 + E_3) = -E_1 + kE_2, \quad F(E_2 + E_3) = (2 + k)E_2 + 2E_4,$$
$$F(E_2 - E_3) = (2 - k)E_2 + 2E_3 + 2E_4, \quad F(E_4) = (1 - k)E_4,$$
dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice di F;
(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;
(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X + Z = 2$ e si considerino le rette
$$r_1 : \begin{cases} X = 2 + t \\ Y = 1 - t \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X + Y + 3Z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
(a) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a r_1 e p non è parallelo a r_2.
(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a r_2 e p contiene r_1.
(c) Determinare tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tali che r è parallela a p_1 ed incidente a r_1 e r_2.

6. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali tali che $\dim V < \dim U$. Siano $F : V \to W$ e $G : W \to U$ due applicazioni lineari tali che $Im(F) \oplus N(G) = W$.
(a) Dimostrare che G non è suriettiva;
(b) Costruire un esempio esplicito di tali spezi ed applicazioni con $\dim W \geq 2, \dim V \geq 2$.