UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 15-9-2014

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} -kX_1 + X_2 - kX_3 - X_4 = 2 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - kX_2 + 2X_4 = 1 \\ 2X_1 - X_3 + 5X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & -k & -1 & 2 \\ k & -1 & -k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ k & -1 & -k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 2 & 1 \\ -k & 1 & -k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to 2R_2, R_3 \to 2R_3, R_4 \to 2R_4$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 2k & -2 & -2k & 2 & 0 \\ 2 & -2k & 0 & 4 & 2 \\ -2k & 2 & -2k & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 + kR_1$, danno

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -k & 2-5k & 0 \\ 0 & -2k & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3k & -2+5k & 4 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 - kR_2, R_4 \to R_4 + R_2$ danno

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -k & 2-5k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & 5k^2-2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & -4k & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to \frac{1}{4}R_4$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -k & 2-5k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & 5k^2-2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{k}{1+k^2}R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -k & 2-5k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & 5k^2-2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k(5k^2-2k-1)}{1+k^2} & \frac{(k+1)^2}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0, \frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$, si vede subito che $\frac{k(5k^2-2k-1)}{1+k^2} = 0$ mentre $\frac{(k+1)^2}{1+k^2} \neq 0$, dunque il sistema è incompatibile.
Se invece $k \neq 0, \frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$ il sistema è a gradini e si calcolano facilmente le soluzioni

$$X_4 = \frac{(k+1)^2}{k(5k^2-2k-1)},\ X_3 = -\frac{1}{k},\ X_2 = -\frac{5k^2+k-1}{k(5k^2-2k-1)},\ X_1 = -\frac{5k^2+4k+2}{k(5k^2-2k-1)}. \quad \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = <(1,-1,0,0),(0,1,0,-1),(1,-k,0,-1)> .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.
(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;
(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(1,-1,0,0),(0,1,0,-1),(1,1,1-k,2k-1),v\}$$

non sono generatori di $W_k + U_k$.

SOLUZIONE:

(a) Posto, nelle equazioni di U_k, $X_1 = t, X_2 = s$, si trova $X_3 = t - ks, X_4 = (k-1)t + ks$, quindi ogni vettore di U_k è del tipo

$$(t, s, t - ks, (k-1)t + ks) = t(1, 0, 1, k-1) + s(0, 1, -k, k).$$

Si vede facilmente che i due vettori $(1, 0, 1, k-1), (0, 1, -k, k)$ sono linearmente indipendenti e pertanto una base di U_k è $\{(1, 0, 1, k-1), (0, 1, -k, k)\}$ e U_k ha dimensione 2 per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Per calcolare la dimensione di W_k calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -k & -1 \end{vmatrix} = k$$

da cui, per il principio dei minori orlati si deduce che $\dim W_k = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una base di W_k è data da $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ se $k = 0$ e $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (1, -k, 0, -1)\}$ se $k \neq 0$.

(b) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$ calcoliamo il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & -k & k \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -k & k \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \end{vmatrix} = k^2$$

dunque $r(B) = 4$ se $k \neq 0$. Se $k = 0$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

e pertanto ancora $r(B) = 4$. Dunque, per ogni k, si ha $\dim(W_k + U_k) = 4$ e quindi, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_k \cap U_k) = \dim W_k + dimU_k - dim(W_k + U_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} .$$

(c) Osserviamo che $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1 - k, 2k - 1), v\}$ non sono generatori di $W_k + U_k$ se e solo se $r\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1 - k, 2k - 1), v\} \leq 3$. Posto $v = (a, b, c, d)$ si ha, equivalentemente,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1-k & 2k-1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

ovvero $(a + b + d)(1 - k) - c(2k + 1) = 0$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano r la retta passante per $Q(1, -1, 0, 2)$ e parallela a $v_k = -e_1 + ke_2 + e_3 - e_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X + kY + W = -1 \\ X + Y - Z = -3 \\ Z - W = 2 \end{cases} .$$

(a) Determinatre i valori di k per i quali $r \cap T_k$ è un sottospazio affine di A. Calcolare la dimensione di T_k e di $r \cap T_k$.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, r non è parallelo a T_k.
(c) Determinare le equazioni di un piano p in A che $p \supset r$ e p è parallelo a T_k.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo dalla teoria che $r \cap T_k$ è un sottospazio affine di A se e solo se $r \cap T_k \neq \emptyset$. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} X = 1 - t \\ Y = -1 + kt \\ Z = t \\ W = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dunque un punto di r è $P = P(1 - t, -1 + kt, t, 2 - t)$ e $P \in T_k$ se e solo se

$$\begin{cases} 1 - t - k + k^2 t + 2 - t = -1 \\ 1 - t - 1 + kt - t = -3 \\ t - 2 + t = 2 \end{cases}$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} 2k^2 - k = 0 \\ 2k = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

quindi se e solo se $t = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. Si deduce pertanto che $r \cap T_k$ è un sottospazio affine di A se e solo se $k = \frac{1}{2}$ ed in tal caso $r \cap T_{\frac{1}{2}}$ è il punto $Q = Q(-1, 0, 2, 0)$ e quindi $\dim(r \cap T_{\frac{1}{2}}) = 0$.
La giacitura di T_k è data dal sistema omogeneo

$$giac(T_k) : \begin{cases} X + kY + W = 0 \\ X + Y - Z = 0 \\ Z - W = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $X = -\frac{k+1}{2}Y, Z = W = \frac{1-k}{2}Y$. Pertanto i vettori della giacitura di T_k sono tutti del tipo

$$Y(-\frac{k+1}{2}e_1 + e_2 + \frac{1-k}{2}e_3 + \frac{1-k}{2}e_4)$$

da cui $giac(T_k) =< -\frac{k+1}{2}e_1 + e_2 + \frac{1-k}{2}e_3 + \frac{1-k}{2}e_4 >=< -(k+1)e_1 + 2e_2 + (1-k)e_3 + (1-k)e_4 >$ e $\dim T_k = 1$ per ogni k.
(b) Si ha che r non è parallelo a T_k se e solo se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 & -1 \\ -1-k & 2 & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Ora

$$\begin{vmatrix} -1 & k \\ -1-k & 2 \end{vmatrix} = k^2 + k - 2, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1-k & 1-k \end{vmatrix} = 2k$$

non sono mai simultaneamente nulli, quindi $r(B) = 2$ per ogni k e pertanto r non è parallelo a T_k per ogni k.
(c) Sia p un piano di A tale che $p \supset r$ e p è parallelo a T_k. Allora p è parallelo a T_k e r e quindi la giacitura di p è generata dalle giaciture di T_k ed r, cioè

$$giac(p) =< -(k+1)e_1 + 2e_2 + (1-k)e_3 + (1-k)e_4, -e_1 + ke_2 + e_3 - e_4 > .$$

Per determinare p ci serve un qualsiasi suo punto. Dato che $p \supset r$ scegliamo un punto di r, per esempio quello corrispondente a $t = 0$, ovvero $R = R(1, -1, 0, 2)$. Si deduce che, per ogni k, c'è un unico piano p di A tale che $p \supset r$ e p è parallelo a T_k, e le sue equazioni parametriche sono

$$p : \begin{cases} X = 1 - (k+1)u - v \\ Y = -1 + 2k + 2u + kv \\ Z = (1-k)u + v \\ W = 2 + (1-k)u - v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v = e_1 - e_3, w = e_1 + e_2 + (k+2)e_4$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$w \in N(F), F(e_1 + v) = w, \; F(e_2) = e_1 + 2e_3, F(e_2 + e_4) = e_1 - e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;
(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;
(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{w, e_1 + v, e_2, e_2 + e_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & k+2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Dalle condizioni soddisfatte da F deduce che

$$F(w) = 0, F(e_1 + v) = w.$$

Inoltre occorre esprimere $F(e_2) = e_1 + 2e_3$ e $F(e_2 + e_4) = e_1 - e_2$ nella base e. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$e_1 + 2e_3 = aw + b(e_1 + v) + ce_2 + d(e_2 + e_4)$$

ovvero

$$e_1 + 2e_3 = (a + 2b)e_1 + (a + c + d)e_2 - be_3 + (a(k+2) + d)e_4$$

da cui si deduce il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + c + d = 0 \\ -b = 2 \\ a(k+2) + d = 0 \end{cases}$$

e pertanto $a = 5, b = -2, c = 5k + 5, d = -5k - 10$ e quindi

$$F(e_2) = 5w - 2(e_1 + v) + (5k + 5)e_2 - (5k + 10)(e_2 + e_4).$$

Ora sia

$$e_1 - e_2 = aw + b(e_1 + v) + ce_2 + d(e_2 + e_4)$$

ovvero

$$e_1 - e_2 = (a+2b)e_1 + (a+c+d)e_2 - be_3 + (a(k+2)+d)e_4$$

da cui si deduce il sistema

$$\begin{cases} a+2b = 1 \\ a+c+d = -1 \\ -b = 0 \\ a(k+2)+d = 0 \end{cases}$$

e pertanto $a = 1, b = 0, c = k, d = -k-2$ e quindi

$$F(e_2 + e_4) = w + 0(e_1 + v) + ke_2 - (k+2)(e_2 + e_4).$$

Allora si trova

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5k+5 & k \\ 0 & 0 & -5k-10 & -k-2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -T & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5k+5-T & k \\ 0 & 0 & -5k-10 & -k-2-T \end{vmatrix} = T^2(T^2 - (4k+3)T - 5k - 10).$$

Da questo deduciamo che gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica ≥ 2 e, quando esistono, le soluzioni di

$$T^2 - (4k+3)T - 5k - 10 = 0.$$

Risolvendo si trova, osservando che il discriminate è $\Delta = 16k^2 + 44k + 49 > 0$ per ogni k,

$$\frac{4k+3 \pm \sqrt{16k^2+44k+49}}{2}$$

e tali radici sono sempre distinte tra loro. Per studiare la loro molteplicità algebrica occore però verificare se

$$\frac{4k+3 \pm \sqrt{16k^2+44k+49}}{2} = 0$$

che si verifica essere equivalente a $k = -2$. In tal caso si trova, oltre a 0, -5 come altra soluzione. Dunque abbiamo

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{4k+3-\sqrt{16k^2+44k+49}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{4k+3+\sqrt{16k^2+44k+49}}{2}$ (m.a. 1)
$k = -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = -5$ (m.a. 1)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 0$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5k+5 & k \\ 0 & 0 & -5k-10 & -k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 = 0 \\ (5k+5)x_3 + kx_4 = 0 \\ -(5k+10)x_3 - (k+2)x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Quindi, per ogni k, gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $x_1 w$ e una base di $V_0(F)$ è $\{w\}$ per ogni k.
Allora, a parte i casi di molteplicità algebrica 1, nei quali, come sappiamo, anche la molteplicità geometrica è 1, abbiamo che, per ogni k, $\dim V_0(F) = 1$.
(c) Dato che $m.g.(0) = 1 < m.a.(0)$, se ne conclude che F non è diagonalizzabile per nessun k. ■