UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 15-9-2014

TESTO

Avvertenze:
Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} -kX_1 + X_2 - kX_3 - X_4 = 2 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - kX_2 + 2X_4 = 1 \\ 2X_1 - X_3 + 5X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in\mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k =< (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (1, -k, 0, -1) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1 - k, 2k - 1), v\}$$

non sono generatori di $W_k + U_k$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano r la retta passante per $Q(1, -1, 0, 2)$ e parallela a $v_k = -e_1 + ke_2 + e_3 - e_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X + kY + W = -1 \\ X + Y - Z = -3 \\ Z - W = 2 \end{cases} .$$

(a) Determinatre i valori di k per i quali $r \cap T_k$ è un sottospazio affine di A. Calcolare la dimensione di T_k e di $r \cap T_k$.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, r non è parallelo a T_k.
(c) Determinare le equazioni di un piano p in A che $p \supset r$ e p è parallelo a T_k.
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v = e_1 - e_3, w = e_1 + e_2 + (k+2)e_4$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$w \in N(F), F(e_1 + v) = w, \ F(e_2) = e_1 + 2e_3, F(e_2 + e_4) = e_1 - e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;
(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;
(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.