UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 29-1-2015

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - kX_3 - X_4 = 1 \\ kX_1 - kX_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - kX_2 - X_4 = 1 \\ 2X_1 - X_3 + (k-1)X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -k & -1 \\ k & -k & -1 & 1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = k^2(k+1)(k-3)$$

pertanto, se $k \neq -1, 0, 3$ il sistema è compatibile e le sue soluzioni si ottengono con il metodo di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -k & -1 \\ 0 & -k & -1 & 1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k(k^2+k-4)}{k^2(k+1)(k-3)} = -\frac{k^2+k-4}{k(k+1)(k-3)},$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -k & -1 \\ k & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k(k+1)(k-2)}{k^2(k+1)(k-3)} = -\frac{k-2}{k(k-3)},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2k(k+1)(k-2)}{k^2(k+1)(k-3)} = -\frac{2(k-2)}{k(k-3)},$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -k & 1 \\ k & -k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4k}{k^2(k+1)(k-3)} = \frac{4}{k(k+1)(k-3)}.$$

Se $k = -1$ si ha

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e $r(A) < 4$ mentre

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

quindi $r(A\ b) = 4$ e il sistema è incompatibile.

Se $k = 0$ si ha

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, rimuovendo la prima riga (che è uguale alla terza) e la seconda colonna (che è nulla) si ha $r(A\ b) = r(B)$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

si trova che $r(A\ b) = 3$. Procedendo analogamente su A si ottiene che $r(A) = r(C)$, dove

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ma $\det(C) = 0$ e si vede che $r(C) = 2$, quindi il sistema è incompatibile.

Infine se $k = 3$ si ha

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e $r(A) < 4$ mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

quindi $r(A\ b) = 4$ e il sistema è incompatibile.

Si conclude che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq -1, 0, 3$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 1, k, 0), v_3 = (1, k, 1, 0), v_4 = (4, 4, 0, 2 - k),$$

$$U =< v_1, v_2, v_3 > \text{ e } W = U+ < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$;

(c) Determinare se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$(U \cap W) \oplus < v_2 + v_4, v_4 >= V.$$

SOLUZIONE:

(a) La dimensione di U è il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = (2 - k)(k + 1)$$

si vede che

$$\dim U = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1, 2 \\ 3 & \text{se } k \neq -1, 2 \end{cases}.$$

Ora notiamo che $W =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$, pertanto la sua dimensione è il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 2 - k \end{pmatrix}.$$

Per quanto visto prima, se $k \neq -1, 2$, si ha $r(A) = 4$, quindi $\dim W = 4$.
Se $k = 2$ si vede facilmente che $r(A) = r(B)$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come sopra, $r(B) = 2$, quindi $\dim W = 2$.
Se $k = -1$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha due righe proporzionali, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

quindi $r(A) = 3$ e $\dim W = 3$.
Si conclude che

$$\dim W = \begin{cases} 3 & \text{se } k = -1 \\ 2 & \text{se } k = 2 \\ 4 & \text{se } k \neq -1, 2 \end{cases}.$$

(b) Notiamo che $U \subseteq W$, quindi, ovviamente

$$\dim(U \cap W) = \dim U = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1, 2 \\ 3 & \text{se } k \neq -1, 2 \end{cases},$$

$$\dim(U + W) = \dim W = \begin{cases} 3 & \text{se } k = -1 \\ 2 & \text{se } k = 2 \\ 4 & \text{se } k \neq -1, 2 \end{cases}.$$

(c) Osserviamo che $v_2 \in U = U \cap W$ e anche $v_2 \in < v_2 + v_4, v_4 >$, dato che $v_2 = (v_2 + v_4) - v_4$. Essendo $v_2 \neq 0$ si conclude che la somma $(U \cap W)+ < v_2 + v_4, v_4 >$ non può essere mai diretta. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano p il piano passante per O e parallelo a $v_k = e_1 + e_2 + e_3 - ke_4$ e $w = e_2 - e_3$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - kZ - W = 2 \\ X - Y - W = 2 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali $p \cap T_k$ è un sottospazio affine di A. Calcolare la dimensione di T_k e di $p \cap T_k$.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, p è parallelo a T_k.
(c) Determinare per quali valori di k, se esistono, c'è una retta r in A tate che $r \subset p$ e r è parallela a T_k.

SOLUZIONE:

(a) Le equazioni parametriche di p sono

$$\begin{cases} X = t \\ Y = t + s \\ Z = t - s \\ W = -kt \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Intersecando p con T_k si ottiene il sistema

$$\begin{cases} t - k(t-s) + kt = 2 \\ t - (t+s) + kt = 2 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} t + ks = 2 \\ kt - s = 2 \end{cases}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix} = -1 - k^2 \neq 0$$

si deduce che il sistema ha un'unica soluzione e pertanto $p \cap T_k$ è un punto, quindi in particolare un sottospazio affine di A, per ogni k. Inoltre $\dim(p \cap T_k) = 0$ per ogni k.
La dimensione di T_k è $4 - r(A)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\dim T_k = 2$ per ogni k.
(b) Dato che p e T_k sono entrambi piani, se fossero paralleli, sarebbero coincidenti, dato che si intersecano. Ma allora si avrebbe $p \cap T_k = p$, contraddicendo (a). Pertanto non esistono valori di k per cui p è parallelo a T_k.
(c) Se esistesse una retta r in A tate che $r \subset p$ e r è parallela a T_k, allora, in particolare, r sarebbe parallela a p ed a T_k. Quindi la giacitura di r sarebbe contenuta nelle giaciture di p e di T_k, ovvero nella loro intersezione. Ma la loro intersezione è la giacitura di $p \cap T_k$, che è $\{0\}$, assurdo. Si conclude che r non esiste per nessun valore di k. ∎

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (0,1,1), v_2 = (-1,1,0) \in \mathbb{R}^3$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = k(id_U), F(E_3) = E_1 - 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, E_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Dalle condizioni soddisfatte da F si deduce che

$$F(v_1) = kv_1, F(v_2) = kv_2.$$

Inoltre occorre esprimere $F(E_3)$ nella base e. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$E_1 - 2E_3 = av_1 + bv_2 + cE_3$$

ovvero

$$E_1 - 2E_3 = a(E_2 + E_3) + b(-E_1 + E_2) + cE_3$$

da cui si deduce il sistema

$$\begin{cases} -b = 1 \\ a + b = 0 \\ a + c = -2 \end{cases}$$

e pertanto $a = 1, b = -1, c = -3$, da cui

$$F(E_3) = v_1 - v_2 - 3E_3$$

e quindi

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 1 \\ 0 & k-T & -1 \\ 0 & 0 & -3-T \end{vmatrix} = -(T-k)^2(T+3)$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq -3$	$\lambda_1 = k$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -3$ (m.a. 1)
$k = -3$	$\lambda_1 = -3$ (m.a. 3)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = k$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_k(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore k sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - kI_3)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z)$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ (-3-k)z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $z = 0$. Quindi, per ogni k, gli autovettori di F associati all'autovalore k sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$ e una base di $V_k(F)$ è $\{v_1, v_2\}$. In particolare la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = k$ è 2 (per ogni k).

Nell'altro caso, $\lambda_2 = -3$ quando $k \neq -3$, sappiamo che la molteplicità algebrica è 1, quindi anche la molteplicità geometrica è 1.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq -3$

autovalore	m.g.	m.a.
k	2	2
-3	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $k = -3$

autovalore	m.g.	m.a.
-3	2	3

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -3$. $\blacksquare$