UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prova scritta del 29-1-2015

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - kX_3 - X_4 = 1 \\ kX_1 - kX_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - kX_2 - X_4 = 1 \\ 2X_1 - X_3 + (k-1)X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (-1,1,k,0), v_3 = (1,k,1,0), v_4 = (4,4,0,2-k),$$

$$U = < v_1, v_2, v_3 > \text{ e } W = U + < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$;

(c) Determinare se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$(U \cap W) \oplus < v_2 + v_4, v_4 > = V.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano p il piano passante per O e parallelo a $v_k = e_1 + e_2 + e_3 - ke_4$ e $w = e_2 - e_3$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - kZ - W = 2 \\ X - Y - W = 2 \end{cases} .$$

(a) Determinare i valori di k per i quali $p \cap T_k$ è un sottospazio affine di A. Calcolare la dimensione di T_k e di $p \cap T_k$.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, p è parallelo a T_k.
(c) Determinare per quali valori di k, se esistono, c'è una retta r in A tate che $r \subset p$ e r è parallela a T_k.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = k(id_U), F(E_3) = E_1 - 2E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.