Sia $j \in \{1, \dots, n\}$ e sia $p \in \sigma_n$ una permutazione e tale che $p(1) = j$.
Sia $q \in \sigma_{n-1}$ cosi' definita, per $1 \leq k \leq n-1$,

$$q(k) = \begin{cases} p(k+1) & \text{se } p(k+1) < j \\ p(k+1) - 1 & \text{se } p(k+1) > j \end{cases}$$

(notiamo che non può essere $p(k+1) = j$, altrimenti $k+1 = 1$).
Vogliamo dimostrare che

$$\varepsilon(q) = (-1)^{j-1}\varepsilon(p). \tag{1}$$

A questo scopo introduciamo la permutazione $r \in \sigma_n$ cosi' definita

$$r(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ q(k-1) + 1 & \text{se } 2 \leq k \leq n \end{cases}.$$

Mostriamo ora che

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(q). \tag{2}$$

Sia $g = (12 \dots n)$ ed facciamo vedere che, defindendo $q(n) = n$, in modo che $q \in \sigma_n$, si ha

$$r = g \circ q \circ g^{-1}. \tag{3}$$

Infatti $g(q(g^{-1}(1))) = g(q(n)) = g(n) = 1 = r(1)$, mentre se $2 \leq k \leq n$ si ha $g(q(g^{-1}(k))) = g(q(k-1)) = q(k-1) + 1 = r(k)$ e la (3) è dimostrata. Ora la (2) segue immediatamente dalla (3) dato che $g = (1n) \circ (1, n-1) \dots \circ (13) \circ (12)$ è prodotto di $n-1$ trasposizioni e cosi' g^{-1} e dunque se q è prodotto di h trasposizioni allora r è prodotto di $h + 2n - 2$ trasposizioni. Dunque $\varepsilon(r) = (-1)^{h+2n-2} = (-1)^h = \varepsilon(q)$.
Ora sia $t = (12) \circ (23) \circ \dots \circ (j-1, j)$. Affermo che

$$r = t \circ p. \tag{4}$$

Infatti, per $1 \leq i \leq j-1$ sia $k_i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $p(k_i) = i$.
Se $k = 1$ si ha $p(1) = j$ e $t(j) = 1$, dunque $(t \circ p)(1) = 1 = r(1)$. Sia $k \geq 2$. Se $k = k_i$ per qualche $i \in \{1, \dots, j-1\}$, si ha $p(k_i) = i < j$, dunque $t(i) = i + 1$, quindi $(t \circ p)(k_i) = i + 1$. Ma anche $r(k_i) = q(k_i - 1) + 1 = p(k_i) + 1 = i + 1$, quindi $(t \circ p)(k_i) = r(k_i)$. Se $k \neq k_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, j-1\}$, si ha, per l'iniettività di p, $p(k) \neq p(1) = j$ e $p(k) \neq p(k_i) = i$, dunque $p(k) > j$ e quindi $r(k) = q(k-1) + 1 = p(k)$. Ma, essendo $p(k) > j$, si ha $t((p(k)) = p(k)$ e quindi $(t \circ p)(k) = r(k)$.
Questo dimostra la (4). Da ciò discende che $\varepsilon(r) = (-1)^{j-1}\varepsilon(p)$ e dalla (2) si deduce la (1).