UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 + X_4 = -k \\ X_1 + kX_2 - kX_3 = k^2 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni (si ricorda che non è possibile usare la regola di Cramer).

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & k & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 1 & -k \\ 1 & k & -k & 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ k & k & -1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 1 & -k \\ 1 & k & -k & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - kR_1, R_4 \to R_4 - R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 & 0 \\ 0 & 1-k & k & k+1 & -k \\ 0 & k-1 & 1-k & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & k & k+1 & -k \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 + R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & k & k+1 & -k \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k+2 & k^2-k \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & k & k+1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & k+2 & k^2-k \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 + (1-k)R_3$ si ottiene la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & k & k+1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & k+2 & k^2-k \\ 0 & 0 & 0 & 3-k^2 & -k(k-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo prima $k \neq 1$.

Se $k = \pm\sqrt{3}$ il sistema è incompatibile in quanto $-k(k-1)^2 \neq 0$.

Se $\mathbf{k} \neq \pm\sqrt{\mathbf{3}}$ il sistema è a gradini ed ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli)

$$\mathbf{X_4} = \frac{\mathbf{k(k-1)^2}}{\mathbf{k^2-3}},\ \mathbf{X_3} = \frac{\mathbf{k-k^3}}{\mathbf{k^2-3}},\ \mathbf{X_2} = \frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{(1-k)(k^2-3)}},\ \mathbf{X_1} = \frac{\mathbf{2k^2(k-2)}}{\mathbf{(1-k)(k^2-3)}}.$$

Ora supponiamo $k = 1$.

Sostituendo in B si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to \frac{1}{2}R_4$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e pertanto il sistema è incompatibile in questo caso.

Si conclude allora che **il sistema è compatibile se e solo se k** $\neq \mathbf{1}, \pm\sqrt{\mathbf{3}}$**.** ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k per i quali esiste una matrice $C \in M_3$ tale che $AC = B$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di C.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$(A\ I_3) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to 2R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 2k & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & -4 & 2 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 + (k-2)R_2$ da la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-2k-4 & 2 & k-2 & -k \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $k^2 - 2k - 4 = 0$ se e solo se $k = 1 \pm \sqrt{5}$. In particolare

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \pm \sqrt{5} \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

e quindi **A è invertibile se e solo se** $\mathbf{k \neq 1 \pm \sqrt{5}}$**.**

Sia ora $k \neq 1 \pm \sqrt{5}$ e proseguiamo dalla matrice D, ponendo, per comodità, $d = k^2 - 2k - 4$. Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{d} R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - kR_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2k}{d} & -\frac{4}{d} & \frac{k^2}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{2k}{d} & \frac{4}{d} & -\frac{2k+4}{d} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2k}{d} & -\frac{4}{d} & \frac{k^2}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

ed infine l'operazione $R_1 \to \frac{1}{2} R_1$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{k}{d} & \frac{2}{d} & -\frac{k+2}{d} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2k}{d} & -\frac{4}{d} & \frac{k^2}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{d} & \frac{2}{d} & -\frac{k+2}{d} \\ -\frac{2k}{d} & -\frac{4}{d} & \frac{k^2}{d} \\ \frac{2}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{k}{d} \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{k^2 - 2k - 4}} \begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{2} & \mathbf{-k-2} \\ \mathbf{-2k} & \mathbf{-4} & \mathbf{k^2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{k-2} & \mathbf{-k} \end{pmatrix}.$$

(b) Se $k \neq 1 \pm \sqrt{5}$ sappiamo da (a) che A è invertibile, quindi basta scegliere $C = A^{-1}B$. Se $k = 1 \pm \sqrt{5}$ allora A ha rango 2. Calcoliamo il rango di B. Da

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

scambiando R_1 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1+\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1+\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$$

ed infine l'operazione $R_3 \to R_3 + (-1+\sqrt{5})R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che B ha rango 3.

Ora se esistesse $C \in M_3$ tale che $AC = B$ si avrebbe la contraddizione

$$3 = r(B) = r(AC) \leq r(A) = 2.$$

Dunque per $k = 1 \pm \sqrt{5}$ la matrice C non esiste.

Si conclude pertanto che **la matrice C esiste se e solo se** $\mathbf{k \neq 1 \pm \sqrt{5}}$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = < (1,1,1,0), (2,1,0,-1), (k,-k,-3,-2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\{(1,1,1,0), (2,1,0,-1), (k,-k,-3,-2), v\}$ non sono generatori di W_k.

SOLUZIONE:

(a) Posto, nelle equazioni di U_k, $X_3 = t, X_4 = s$, si trova $X_1 = t - s, X_2 = (k+1)t - s$, quindi ogni vettore di U_k è del tipo

$$(t-s, (k+1)t - s, t, s) = t(1, k+1, 1, 0) + s(-1, -1, 0, 1)$$

e quindi **una base di $\mathbf{U_k}$ è $\{(\mathbf{1}, \mathbf{k+1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}$ e pertanto $\mathbf{U_k}$ ha dimensione 2 per ogni k** $\in\mathbb{R}$.

Per calcolare la dimensione di W_k consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ k & -k & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2k & -3-k & -2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2kR_2$, si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $\mathbf{dim W_k} = \mathbf{r(A)} = \begin{cases} \mathbf{2} & \mathbf{se\ k = 1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{se\ k \neq 1} \end{cases}$ ed **una base di $\mathbf{W_k}$ è data da $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})\}$ se $\mathbf{k = 1}$ e $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}), (\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{3}, -\mathbf{2})\}$ se $\mathbf{k \neq 1}$.**

(b) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$, considerate le operazioni fatte sopra per W_k, facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_2 + R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_4, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 + kR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k & 1-k \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_4 \to R_4 + (2k-1)R_3, R_5 \to R_5 + 3(1-k)R_3$ si ottiene la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo pertanto che, **per ogni k**, $\mathbf{dim(W_k + U_k) = r(B) = 4}$ e quindi, per la formula di Grassmann,

$$\mathbf{dim(W_k \cap U_k) = dimW_k + dimU_k - dim(W_k + U_k)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{se\ k = 1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{se\ k \neq 1} \end{cases}.$$

(c) Osserviamo che

$$\{(1,1,1,0),(2,1,0,-1),(k,-k,-3,-2),v\} \text{ sono generatori di } W_k$$

se e solo se

$$<(1,1,1,0),(2,1,0,-1),(k,-k,-3,-2),v>= W_k$$

dunque, dato che $<(1,1,1,0),(2,1,0,-1),(k,-k,-3,-2)>= W_k$, se e solo se

$$v \in W_K.$$

Posto $v = (a,b,c,d)$ e, considerate le operazioni fatte sopra per W_k, posto

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

si deduce che $\{(1,1,1,0),(2,1,0,-1),(k,-k,-3,-2),v\}$ non sono generatori di W_k se e solo se

$$r(C) > \dim W_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k=1 \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}.$$

Facciamo operazioni elementari su C. Con l'operazione $R_4 \to R_4 - aR_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \\ 0 & b-a & c-a & d \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + (b-a)R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 2(k-1) \\ 0 & 0 & a-2b+c & a-b+d \end{pmatrix}.$$

Ora, **se $\mathbf{k=1}$, la condizione è che o $\mathbf{a-2b+c \neq 0}$ oppure $\mathbf{a-b+d \neq 0}$**.

Invece, se $k \neq 1$, facciamo l'operazione $R_3 \to \frac{1}{3(k-1)}R_3$ sulla matrice precedente ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & a-2b+c & a-b+d \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + (-a+2b-c))R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a+b-2c+3d}{3} \end{pmatrix}$$

e pertanto, **se $\mathbf{k \neq 1}$, la condizione è che $\mathbf{a+b-2c+3d \neq 0}$**. ■