UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Prima prova di esonero

1. Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 + X_4 = -k \\ X_1 + kX_2 - kX_3 = k^2 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni (si ricorda che non è possibile usare la regola di Cramer).

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k per i quali esiste una matrice $C \in M_3$ tale che $AC = B$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di C.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = < (1,1,1,0), (2,1,0,-1), (k,-k,-3,-2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\{(1,1,1,0), (2,1,0,-1), (k,-k,-3,-2), v\}$ non sono generatori di W_k.