UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano $v = 2e_1 + e_3$ e $w \in V$ tale che $w \notin < e_1, e_2, e_3 >$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia F un endomorfismo di V tale che

$$v \in N(F), F(e_2) = ke_2 + w, F(e_1 + e_3) = e_1 + (2 - 2k)e_2 + e_3 + \frac{7}{4}w, F(w) = v + 2e_2 + e_1 + e_3.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che v, e_2 ed $e_1 + e_3$ sono linearmente indipendenti in quanto

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha chiaramente rango 3. Quindi $\dim(< v, e_2, e_1 + e_3 >) = 3$ ed essendo

$$< v, e_2, e_1 + e_3 > \subseteq < e_1, e_2, e_3 >$$

che pure ha dimensione 3, si deduce che $< v, e_2, e_1 + e_3 > = < e_1, e_2, e_3 >$. Ma allora $w \notin < v, e_2, e_1 + e_3 >$ e quindi $e = \{v, e_2, e_1 + e_3, w\}$ è una base di V. Dalle condizioni soddisfatte da F deduce che

$$F(v) = 0, F(e_2) = ke_2 + w, F(e_1 + e_3) = (2 - 2k)e_2 + (e_1 + e_3) + \frac{7}{4}w, F(w) = v + 2e_2 + (e_1 + e_3)$$

e quindi

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 2 - 2k & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k-T & 2-2k & 2 \\ 0 & 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -T \end{vmatrix} = -T\big[(k-T)(-T+T^2-\frac{7}{4})-2(k-T)\big] =$$

$$= T(T-k)(T^2-T-\frac{15}{4}) = T(T-k)(T-\frac{5}{2})(T+\frac{3}{2})$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq 0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_4 = k$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ (m.a. 1)
$k = -\frac{3}{2}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ (m.a. 2), $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ (m.a. 1)
$k = \frac{5}{2}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ (m.a. 2)

(b) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq 0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$:

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
$-\frac{3}{2}$	1	1
$\frac{5}{2}$	1	1
k	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $k = 0$:

Osserviamo che la matrice

$$M_e(F) - 0I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in quanto

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{7}{4} & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

quindi l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica $4-3=1$ e pertanto

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	2
$-\frac{3}{2}$	1	1
$\frac{5}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k=-\frac{3}{2}$:

Osserviamo che la matrice

$$M_e(F)+\frac{3}{2}I_3=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in quanto

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{vmatrix}=-\frac{15}{2}\neq 0$$

quindi l'autovalore $\frac{3}{2}$ ha molteplicità geometrica $4-3=1$ e pertanto

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
$-\frac{3}{2}$	1	2
$\frac{5}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k=\frac{5}{2}$:

Osserviamo che la matrice

$$M_e(F)-\frac{5}{2}I_3=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in quanto

$$\begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{vmatrix}=-\frac{15}{2}\neq 0$$

quindi l'autovalore $\frac{5}{2}$ ha molteplicità geometrica $4-3=1$ e pertanto

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
$-\frac{3}{2}$	1	1
$\frac{5}{2}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se esolo se $k \neq 0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + Z = -1 \\ X + Y = 2 \end{cases}, \quad T_k : \begin{cases} (k+1)X + (k-1)Y + Z + kW = -1 \\ 3X + 3Y = 6 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k si ha che S è parallelo a T_k.

(c) Determinare le equazioni di tutte le rette r in A tali che r sia parallela a S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di S è data dal sistema omogeneo

$$(1) \qquad \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ X + Y = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $Y = -X, Z = -2X$. Pertanto i vettori della giacitura di S sono tutti del tipo

$$Xe_1 - Xe_2 - 2Xe_3 + We_4 = X(e_1 - e_2 - 2e_3) + We_4$$

da cui $giac(S) =< e_1 - e_2 - 2e_3, e_4 >$ e quindi $\dim S = 2$.

La giacitura di T_k è data dal sistema omogeneo

$$(2) \qquad \begin{cases} (k+1)X + (k-1)Y + Z + kW = 0 \\ 3X + 3Y = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $Y = -X, Z = -2X - kW$. Pertanto i vettori della giacitura di T_k sono tutti del tipo

$$Xe_1 - Xe_2 - (2X + kW)e_3 + We_4 = X(e_1 - e_2 - 2e_3) + W(-ke_3 + e_4)$$

da cui $giac(T_k) =< e_1 - e_2 - 2e_3, -ke_3 + e_4 >$ e quindi $\dim T_k = 2$ per ogni k.
(b) Dato che S e T_k hanno la stessa dimensione, si ha che S è parallelo a T_k se e solo se $giac(S) = giac(T_k)$, dunque se e solo se

$$< e_1 - e_2 - 2e_3, e_4 >=< e_1 - e_2 - 2e_3, -ke_3 + e_4 > .$$

Si vede subito che questa condizione è soddisfatta se $k = 0$. Viceversa se $< e_1 - e_2 - 2e_3, e_4 >=< e_1 - e_2 - 2e_3, -ke_3 + e_4 >$ allora $-ke_3 + e_4 \in< e_1 - e_2 - 2e_3, e_4 >$, quindi il rango di $\{-ke_3 + e_4, e_1 - e_2 - 2e_3, e_4\}$ è 2. Ma allora la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & -k & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $k = 0$.
Quindi S è parallelo a T_k se e solo se $k = 0$.
(c) Sia r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = a + lt \\ Y = b + mt \\ Z = c + nt \\ W = d + pt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (l, m, n, p) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Affichè r sia parallela a S e T_k si deve avere che (l, m, n, p) soddisfano (1) e (2), dunque

$$\begin{cases} l - m + n = 0 \\ l + m = 0 \\ (k + 1)l + (k - 1)m + n + kp = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$m = -l, n = -2l = -2l - kp$$

quindi $kp = 0$.
Se $k \neq 0$ si deduce che $p = 0$ e dunque

$$r : \begin{cases} X = a + lt \\ Y = b - lt \\ Z = c - 2lt \\ W = d \end{cases}, t \in \mathbb{R}, l \neq 0.$$

Se $k = 0$ si deduce che

$$r \begin{cases} X = a + lt \\ Y = b - lt \\ Z = c - 2lt \\ W = d + pt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (l, p) \neq (0, 0). \quad \blacksquare$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo i due sottospazi vettoriali

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, x + z = 0\}.$$

(a) Scrivere esplicitamente una base di V/W.

(b) Esiste un isomorfismo $V/W \cong W$? Se sì, scriverlo esplicitamente.

SOLUZIONE:

(a) I vettori di V sono tutti del tipo $(x, x, z) = x(E_1 + E_2) + zE_3$, pertanto $\dim V = 2$. I vettori di W sono tutti del tipo $(x, x, -x) = x(E_1 + E_2 - E_3)$, pertanto $\dim W = 1$. Dato che W è chiaramente un sottospazio di V si deduce anche che

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W = 1.$$

Dunque una base di V/W è semplicemente data dalla classe di un vettore di V non appartenente a W, per esempio E_3. Dunque una base di V/W è $\{E_3 + W\}$.

(b) Dato che V/W e W hanno la stessa dimensione, è noto che esiste un isomorfismo $V/W \cong W$. Per scriverlo esplicitamente, come visto a lezione, basta mandare ogni vettore della base di V/W in un vettore della base di W. Dunque un isomorfismo è per esempio l'unica applicazione lineare

$$F : V/W \to W \quad \text{tale che} \quad F(E_3 + W) = E_1 + E_2 - E_3. \quad \blacksquare$$