UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2013-2014

Seconda prova di esonero

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano $v = 2e_1 + e_3$ e $w \in V$ tale che $w \notin < e_1, e_2, e_3 >$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia F un endomorfismo di V tale che

$$v \in N(F), F(e_2) = ke_2 + w, F(e_1 + e_3) = e_1 + (2 - 2k)e_2 + e_3 + \frac{7}{4}w, F(w) = v + 2e_2 + e_1 + e_3.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + Z = -1 \\ X + Y = 2 \end{cases}, \; T_k : \begin{cases} (k+1)X + (k-1)Y + Z + kW = -1 \\ 3X + 3Y = 6 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k si ha che S è parallelo a T_k.

(c) Determinare le equazioni di tutte le rette r in A tali che r sia parallela a S e T_k.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo i due sottospazi vettoriali

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, x + z = 0\}.$$

(a) Scrivere esplicitamente una base di V/W.

(b) Esiste un isomorfismo $V/W \cong W$? Se sì, scriverlo esplicitamente.