Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 1
27 Febbraio 2014

1. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. É vero che:
a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;
b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
Altrimenti qual é l'ipotesi mancante?

SOLUZIONE:
Non é vero in quanto il prodotto tra matrici non gode della proprietá commutativa. In generale non si puó quindi dire che $AB = BA$, in questo caso quindi $AB + BA \neq 2AB$ e $AB - BA \neq 0$.

2. Sia $C \in M_2(\mathbb{C})$, $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, svolgere le seguenti operazioni:

- $iC^2 + 3C + i\mathbb{I}_2$;
- $3C^2 + 7C^3$;
- ${}^tCC$.

SOLUZIONE:

- $iC^2 + 3C + i\mathbb{I} = i\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} i & -2 \\ -4 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & 3 \\ 6 & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 1 \\ 2 & 5i \end{pmatrix}$;
- $3C^2 + 7C^3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 5i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+35i & 6i-7 \\ 12i-14 & 35i+3 \end{pmatrix}$;
- ${}^tCC = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Calcolare ove possibile:

- ${}^tA$; ${}^tC$, AC, ${}^tAC, {}^tA{}^tC$, ${}^tC{}^tA$;
- ACD, $3(AC+B)D^2$.

SOLUZIONE:
${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;
${}^tC = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
$AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
${}^tAC$ e ${}^tA\,{}^tC$ non si possono fare;
${}^tC{}^tA ={}^t(AC) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;
$ACD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 22 \\ 18 & -2 & 24 \\ 9 & 3 & 66 \\ 9 & 1 & -12 \end{pmatrix}$;
$3(AC+B)D^2 = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -3 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 13 \end{pmatrix}$

4. Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente di ordine 3.
   SOLUZIONE:
   $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
   Da cui si ricava subito che $A^3 = \underline{0}$.

5. Dimostrare che se una matrice quadrata é nilpotente allora non puó essere invertibile.
   SOLUZIONE:
   A matrice quadrata si dice nilpotente di ordine n se $A^n = \underline{0}$ e n é il piú piccolo intero che verifica questa proprietá.
   Supponiamo per assurdo che A sia invertibile, quindi esiste B matrice quadrata t.c. $AB = BA = \mathbb{I}$.
   $BA^n = B(A^n) = B\underline{0} = \underline{0}$ e $BA^n = (BA)A^{n-1} = \mathbb{I}A^{n-1} = A^{n-1} \neq \underline{0}$ da cui l'assurdo.
   N.B. L'unica proprietá sfruttata é quella associativa!

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda\mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

dove $\lambda, x \in R$.
SOLUZIONE:
Sia $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ la generica matrice $2x2$. Si ha che:
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{pmatrix}$
Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 b_{22} = b_{11} 0 = 0 b_{21} = 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava la seguente soluzione $\begin{cases} b_{11} = t b_{12} = s b_{21} = 0 b_{22} = t \end{cases}$
con $s, t \in \mathbb{R}$ Di conseguenza B deve essere del tipo $B = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Basta porre $\lambda = t$ e $x = s$ per avere la soluzione.

7. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2x2}(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I é chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici.
SOLUZIONE:
Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:
$A + B = A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x & b + y \\ 0 & c + z \end{pmatrix} \in I;$
$AB = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in I.$
Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I é che l'elemento di posizione $(2, 1)$ si annulli, cosa che viene verificata in entrambi i casi.