Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 3
13 Marzo 2013

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
Se possibile si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$

   - $v_1 = (1,3,2),\ v_2 = (2,1,-1),\ v_3 = (1,2,-2)$
   - $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,6),\ v_3 = (2,3,0)$
   - $v_1 = (4,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (4,0,5),\ v_4 = (1,1,0)$
   - $v_1 = (3,-5,2),\ v_2 = (1,3,-1)$

   SOLUZIONE:

   - Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (0,0,0)$.
   $\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 3a+b+2c=0 \\ 2a-b-2c=0 \end{cases}$ poiché l'unica soluzione di questo sistema è $(0,0,0)$, si ha che l'unica combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 3 vettori indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.Per trovare una combinazione lineare che dia come risultato $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (1,1,1)$, consideriamo il sistema:
   $$\begin{cases} a+2b+c=1 \\ 3a+b+2c=1 \\ 2a-b-2c=1 \end{cases}$$
   L'unica soluzione è $(\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{3})$, quindi $(1,1,1) = \frac{2}{5}v_1 + \frac{7}{15}v_2 - \frac{1}{3}v_3$.

   - Sono linearmente dipendenti e quindi, essendo 3, non generano $\mathbb{R}^3$. Si ha $v_2 = 2(v_3 - v_1)$, ovviamente $(1,1,1) \in < v_1, v_2, v_3 >$.

   - Sono più di 3 vettori, quindi sono linearmente dipendenti; per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(x,y,z) = a(4,2,1)+b(2,1,1)+c(4,0,5)+d(1,1,0)$, ovvero:
   $$\begin{cases} 4a+2b+4c+d=x \\ 2a+b+d=y \\ a+b+5c=z \end{cases}$$

poiché questo sistema ha soluzioni per qualsiasi valore di (x, y, z) (che considereremo parametri nella soluzione del sistema), abbiamo che ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori, che quindi sono un sistema di generatori. Si ha inoltre che $v_3 = 6v_2 - v_1 - 4v_4$, inoltre $(1, 1, 1) = -v_1 + 2v_2 + v_4$.

- Sono meno di 3 vettori, quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indipendenti.

2. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
a)$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \text{ tc } a, b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
Si calcoli inoltre la loro dimensione.

SOLUZIONE:
Innanzitutto notiamo che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{R}$ sono due campi contenenti $\mathbb{Q}$ e quindi sono entrambi dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali. Una prova di ciò può essere data dal seguente enunciato:
Sia H un campo e K un suo sottocampo. Allora H è uno spazio vettoriale su K con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.
Dimostrazione. Le prime quattro proprietà degli spazi vettoriali valgono perché, essendo H un campo, sarà necessariamente un gruppo abeliano rispetto all'addizione. SV5 e SV6 derivano direttamente dalla proprietà distributiva rispetto alle operazioni definite sul campo, la SV7 dall'associatività del prodotto sul campo e la SV8 dal fatto che l'unità moltiplicativa di K è la stessa di H. □
Cerchiamo ora la loro dimensione:

(a) L'insieme $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{Q}(i)$ (si verifica immediatamente sia che generano lo spazio sia che sono indipendenti). Quindi $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2.

(b) Consideriamo l'insieme $\{1, \pi, \pi^2, ..., \pi^n\}$: si tratta di vettori linearmente indipendenti, in quanto $a_0+a_1\pi+...+a_n\pi^n = 0 \iff a_i = 0, \forall i$, in quanto π è trascendente; quindi se $\mathbb{R}$ avesse dimensione finita, esisterebbe un n per cui quell'insieme è un sistema di generatori. Tuttavia notiamo che π^{n+1} non appartiene al sottospazio generato da quei vettori: infatti, se vi appartenesse, per opportuni a_i si avrebbe che $\pi^{n+1} = a_n\pi^n + ... + a_1\pi + a_0$, che contraddice la suddetta trascendenza di π. Quindi $\mathbb{R}$ non ha dimensione finita su $\mathbb{Q}$.

3. Si determinino le coordinate dei vettori di
$v_1 = (3, 2, -5),\ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
rispetto alle seguenti basi:

- (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
- (b) La base $B = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$

SOLUZIONE:
(a)

- $v_1 = (3, 2, -5) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = -5.$
- $v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2})$ come per v_1 le coordinate rispetto alla base canonica sono $a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{1}{2}$.
- lo stesso per $v_3,\ a = 1,\ b = 1,\ c = 1$.

(b)

- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi risolvendo il seguente sistema:
$\begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2c = 2 \\ 2a + b + c = -5 \end{cases}$
avremo che le coordinate rispetto alla base B sono: $a = -18,\ b = 21,\ c = 10$.
- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 le coordinate rispetto a B sono: $a = -3,\ b = 4,\ c = \frac{3}{2}$.
- $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 e v_2 le coordinate rispetto a B sono: $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{1}{3}$.

4. Dati i seguenti vettori:
$a := (1; 3; 2)$
$b := (-2; k - 6; k + 4)$
$c := (-1; k - 3; k^2 + k + 1)$
$d := (0; -2; k - 1)$

   - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a, b, c\}$ sono linearmente indipendenti.

   - Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a, b, c\}$.

   SOLUZIONE:

   - Imposto il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori dati e lo riduco a gradini in funzione di k e trovo che per $k = 0, \pm\sqrt{5}$ mi si annulla una riga, quindi per tutti e soli quei valori i vettori sono linearmente dipendenti.
   - Dopo aver sostituito a k il valore 2 (per cui i tre vettori a,b,c sono linearmente indipendenti), imposto il sistema come prima ma lo orlo con il quarto vettore. In questo modo le soluzioni sono i coefficienti della combinazione lineare di a,b,c (siano x_1,x_2 e x_3) che mi danno d. Le soluzioni sono: $x_1 = 9$; $x_2 = 10$; $x_3 = -11$.

5. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a := (1, 1, -1) b := (2, -1, 1)$; sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c := (1, 2, -1) d := (-1, -1, 2)$;

Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.
SOLUZIONE:
Impostiamo il sistema omogeneo che ha per colonne i quattro vettori delle due basi ottenendo come soluzione:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{8}{3}t \\ X_2 = -\frac{1}{3}t \\ X_3 = -t \\ X_4 = t \end{cases}$$

Abbiamo usato un parametro dunque $Dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Per trovare una base di $W_1 \cap W_2$ imponiamo $t = 3$ e dalle soluzioni otteniamo: $8V_1 - V_2 - 3V_3 + 3V_4 = 0$ da cui $8V_1 - V_2 = 3V_3 - 3V_4 = (6, 9, -9)$, cioé {(6,9,-9)} costituisce una base di $W_1 \cap W_2$.

6. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
$W_1 := \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.

   - Si verifichi che W_1 é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
     SOLUZIONE:
     W_1 é l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari in $\mathbb{R}^5$, dunque é un sottospazio vettoriale di dimensione: (potenza di $\mathbb{R}$) - (n. equazioni linearmente indipendenti) $= 5 - 2 = 3$. I vettori di W_1 sono della forma $(2x_2; x_2; 0; x_4; x_5)$ Dunque per ottenere una base imponiamo il primo parametro 1 e gli altri 0, poi, il secondo... etc. ottenendo la base $\{(2; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0); (0; 0; 0; 0; 1)\}$.

   - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
     $a := (0, 3, 1, -2, 0)$,
     $b := (0, 0, 2, 1, 1)$,
     $c := (0, 6, -10, -10, -6)$,
     $d := (0, 3, 7, 1, 3)$,
     se ne determini una base e la dimensione.
     SOLUZIONE:
     Imponiamo il sistema omogeneo che ha come colonne i vettori di W_2 e cerchiamone le soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 2v + t \\ x_2 = -6v + 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$
     quindi $(2v + t)a + (-6v + 3t)b + (v)c + (t)d = 0$ per qualsiasi scelta di t e v. Imponendo $v = 1$ e $t = 0$ otteniamo che c é combinazione lineare di a e b, poi, imponendo $v = 0$ e $t = 1$ otteniamo che d é combinazione lineare di a e b, dunque W_2 ha dimensione 2 e una sua base é data da $\{a, b\}$.

   - Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.
     SOLUZIONE:
     Imponendo il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori della base di W_1 e quelli della base di W_2 si ottiene che i vettori sono linearmente indipendenti, dunque l'intersezione é $\emptyset$ e la somma é diretta.

- Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.
  SOLUZIONE:
  Definiamo W_3 mediante la sua base: $W_3 =< (0; 3; 1; -2; 0); (0; 0; 2; 1; 1); (0; 0; 0; 1; 0) >$.

7. Si dica se l'insieme delle coppie reali (complesse) (x, y) soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ é un sottospazio vettoriale di R^2 $(\mathbb{C}^2)$.
   SOLUZIONE:
   Nel caso di $\mathbb{R}^2$ é lo spazio vettoriale banale in quanto l'unica coppia che soddisfa l'equazione é $(0, 0)$.
   Nel caso di $\mathbb{C}^2$ non lo é. Infatti basta prendere in esame le due coppie $(i, 1)$ e $(1, i)$. Sebbene risolvano $x^2 + y^2 = 0$, la loro somma non soddisfa tale relazione. Nei complessi non é dunque uno spazio vettoriale in quanto non chiuso rispetto l'operazione di somma.

8. Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali:
   (a) Matrici antisimmetriche;
   (b) Matrici triangolari superiori;
   (c) Matrici invertibili;
   (d) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 0;
   (e) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 1 (matrice nulla compresa).

   Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n. **SOLUZIONE:**
   Tutti gli insiemi considerati sono sottoinsiemi di M_n . Per verificare se sono anche sottospazi, occorre verificare per ciascuno di essi le tre condizioni:

   - Il vettore nullo (in questo caso la matrice nulla) appartiene all'insieme;
   - Chiusura rispetto alla somma, cioè la somma di due elementi qualsiasi deve appartenere all'insieme stesso;
   - Chiusura rispetto al prodotto per scalari.

   (a) L'insieme delle matrici antisimmetriche é uno spazio vettoriale. Infatti la matrice nulla é antisimmetrica.
   Se ${}^tA = -A$, ${}^tA = -A \quad \Rightarrow \quad {}^t(A + B) =^t A +^t B = -(A + B)$ da cui la chiusura rispetto la somma.
   In modo analogo si dimostra la chiusura rispetto la moltiplicazione per scalare.
   (b) L'insieme delle matrici triangolari superiori é uno spazio vettoriale.
   (c) L'insieme delle matrici invertibili non é uno spazio vettoriale: é sufficiente osservare che la matrice nulla non é invertibile.
   (d) L'insieme delle matrici con l'elemento $(1, 1)$ uguale a 0 é uno spazio vettoriale. Infatti per la matrice nulla l'elemento $(1, 1)$ vale 0, la somma di due matrici in cui l'elemento $(1, 1)$ vale 0 é una matrice

in cui l'elemento $(1,1)$ vale 0 e analogamente l'insieme é chiuso per prodotti con scalari.

(e) L'insieme delle matrici con l'elemento $(1,1)$ uguale 1 non é uno spazio vettoriale: basta osservare che sommando due matrici del genere si ottiene una matrice in cui l'elemento $(1,1)$ vale 2.