Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 4
20 MARZO 2014

1. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ é una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

SOLUZIONE:
Interpretiamo le matrici come vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $M = (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$ ed utilizziamo il sistema per verificare l'indipendenza delle quattro matrici. Poi imponiamo il sistema che ha per colonne le matrici della base portate a vettori e lo orliamo con la matrice E portata a vettore (coerentemente con il modello soprascritto). La soluzione di questo sistema é la combinazione lineare di $\{A, B, C, D\}$ che dá E.
Le soluzioni sono:
$$\begin{cases} a = -\frac{11}{21} \\ b = -\frac{13}{7} \\ c = -\frac{8}{21} \\ d = \frac{17}{21} \end{cases}$$

2. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x + 2y = 2t = 0\}$
$K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$.

   (a) Determinare la dimensione e una base di H, K, $H + K$ e $H \cap K$

   (b) Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.

SOLUZIONE:

   (a) $dim(H) = 2$ infatti le soluzioni del sistema sono $(-2y, y, z, 0)$ e quindi per poter trovare una base di H basta assegnare valori alternativamente diversi a y e z. Otteniamo la seguente base: $< (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) >$. Per calcolare la dimensione di K basta vedere qual Ã¨ il numero di vettori linearmente indipendenti tra quelli che generano il sottospazio; in sostanza basta calcolare il rango del-

la seguente matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; si verifica facilmente che $dim(K) = 3$ e che i tre vettori linearmente indipendenti che costituiscono una base di K sono $< (1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 5) >$
Si ha che $dim(H + K) = 4$ e quindi per Grassmann $dim(H \cap K) = 1$. In particolare $H + K = \mathbb{R}^4$ perché hanno stessa dimensione $\Rightarrow$ una base di $H + K$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Ripetiamo ora il procedimento per ottenere una base dell'intersezione: un vettore di $H \cap K$ Ã¨ un vettore sia di H sia di K; ma allora deve poter essere ottenuto da una combinazione lineare dei vettori della base di K cosí come di quelli della base di K; la traduzione di questo fatto é la seguente: $a(-2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) = (x, y, z, s) = c(1, 2, 0, 1) + d(0, 0, 1, 1) + e(1, -1, 0, 5)$ dove $(x, y, z, s) \in H \cap K$ é un vettore generico dell'intersezione. Dalla serie precedente di uguaglianze otteniamo: $a(-2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) - c(1, 2, 0, 1) - d(0, 0, 1, 1) - e(1, -1, 0, 5) = 0$ e dunque un sistema le cui soluzioni sono $(a, b, c, d, e) = (-3t, -26t, t, -26t, 5t)$.
Sostituendo:
$-3t(-2, 1, 0, 0) - 26t(0, 0, 1, 0) = t(1, 2, 0, 1) - 26t(0, 0, 1, 1) + 5t(1, -1, 0, 5) = (x, y, z, t)$ e per $t = -1$ otteniamo $(-6, 3, 26, 0)$.

(b) Poiché la somma tra H e K non é diretta puó esistere piú di un modo per scrivere il vettore $u := (1, 2, 3, 4)$ come somma di un vettore di H e di un vettore di K; in particolare possiamo scrivere $u = (1, 2, 3, 4) + (0, 0, 0, 0)$.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

(a) Provare che i sottoinsiemi:
$F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}$
$G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = -XA\}$
sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.

(b) Determinare una base per i sottospazi vettoriali F, G, $F + G$, $F \cap G$.

(c) Data la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$ stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.

(d) Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.

SOLUZIONE:

(a) Per prima cosa vediamo com'é un elemento tipo di F.
Se $X \in F$ si ha che $AX = XA$ quindi:
$AX = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 9z & 6y - 9t \\ 4x - 6z & 4y - 6t \end{pmatrix}$.
$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 4y & -9x - 6y \\ 6z + 4t & -9z - 6t \end{pmatrix}$.

Per il principio d'identitá fra le matrici eguaglio componente per componente e ottengo il sistema:

$$\begin{cases} 6x-9z=6x+4y \\ 6y-9t=-9x-6y \\ 4x-6z=6z+4t \\ 4y-6t=-9z-6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{9}{4}z \\ x=3z+t \end{cases}$$

$F = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) | X = \begin{pmatrix} 3z+t & -\frac{9}{4}z \\ z & t \end{pmatrix} \right\}$ con $z, t \in \mathbb{R}$.

F é un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ in quanto contiene il vettore nullo (per $t = z = 0$) ed é chiuso rispetto la somma e il prodotto per scalari. In particolare si é risolto un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, in cui peró due equazioni erano dipendenti dalle altre due, quindi $dim(F) = 2$. Quindi per trovare una base basta trovare due matrici in F indipendenti; per farlo basta azzerare t e porre $z = 4$, e poi fare la stessa cosa a variabili invertite(ma con $t = 1$). In questo modo:

$F = \left\langle \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per trovare il vettore tipo di G si ragiona in modo analogo fino ad ottenere le relazioni:

$$\begin{cases} x=-t \\ y=\frac{9}{4}z+3t \end{cases}$$

$dim(G) = 2$ e una sua base é data dalle matrici $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Per determinare una base di $F + G$ considero le matrici quadrate di ordine 2 come un vettore in $\mathbb{R}^4$, prestando particolare attenzione all'ordine delle componenti. La dimensione di $F+G$ equivale dunque al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & -9 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dim(F+G) = 3.$$

In particolare $F + G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$dim(F \cap G) = 1$ per la formula di Grassmann quindi per avere una base dell'intersezione mi basta trovare un vettore non nullo appartenente a entrambi i sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$.

Se $v \in F$ e $v \in G$ si ha che v puó essere scritto come combinazione lineare di entrambe le basi, quindi:

$v = a(1; 0; 0; 1) + b(12; -9; 4; 0)$ e $v = c(-1; 3; 0; 1) + d(0; 9; 4; 0)$ da cui ricavo il sistema:

$$\begin{cases} a+12b=-c \\ -9b=3c+9d \\ 4b=4d \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6b \\ c=-6b \\ d=b \end{cases}$$

Basta porre $b = 1$ e sostituire in una delle due espressioni precedenti per trovare che $F \cap G =< v := (6; -9; 4; -6) >$.

(c) $h = 5$.

(d) La somma $F+G$ non é diretta; possono esserci piú modi per esprimere una stessa matrice come somma di una matrice di F e di una matrice di G. In questo caso per costruzione $C := 1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$ quindi basta porre $C_1 := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \in F$ e $C_2 := \begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix} \in G$.

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\3 & 0 & 3\\7 & -3 & 1\\2 & 1 & 4\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 7 & 2 & 1\\-2 & 0 & -3 & 1 & -2\\-3 & 3 & 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$;
$C = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 2 & -3\\1 & 3 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.
SOLUZIONE:
Innanzitutto osserviamo che il rango di tutte queste matrici é al massimo tre. Per trovare il rango basta ridurre a gradini e si ha che $r(A) = r(B) = r(C) = 2$ e $r(D) = 3$.

5. Calcolare il rango delle matrici A e B al variare di $a \in \mathbb{R}$:
$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1 & 0\\2 & 0 & a & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & a & 1\\2 & 0 & a\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
SOLUZIONE:
Riducendo a gradini si vede facilmente che la matrice A ha rango massimo, cioé $r(A) = 4$.
Il rango puó anche essere visto anche come l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate con rango massimo. Nel caso della matrice B basta considerare che $r(B) \leq 3$ e che la sottomatrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 0 & a\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ha rango massimo per concludere che $r(B) = 3$.

6. Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \quad p_3(x) = x - x^2$$

Esprimere, se possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$.
SOLUZIONE: Si tratta di stabilire se l'equazione

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = f(x)$$

ammette soluzioni. Esplicitando l'equazione otteniamo:

$$ap_1(x) + b_p2(x) + cp_3(x) = a(1 + x) + b(1 + 2x + x^2) + c(x - x^2)$$

che é equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} b - c = 1 \\ a + 2b + c = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

7. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

   (a) Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema é compatibile.

   (b) Esistono valori di k per i quali il sistema ammette infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.

   SOLUZIONE:

   (a) $k = \pm 2$.

   (b) In entrambi i casi il sistema ammette infinite soluzione. In particolare si ha che:
   Se $k = 2$ le soluzioni del sistema saranno $(x, y, z) = (-t, -t + 2, t)$, con $t \in \mathbb{R}$;
   Se $k = -2$ le soluzioni del sistema saranno $(x, y, z) = (7t, -5t - 2, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

8. Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k + 2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

   SOLUZIONE:
   Se $k \neq 0$, $k \neq 1$ il sistema ammette l'unica soluzione $(x, y, z, w) = \left(\frac{k-2}{k}, 0, 0, \frac{1}{k}\right)$.
   Se $k = 0$ il sistema risulta incompatibile.
   Se $k = 1$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni al variare di t, s in $\mathbb{R}$ della forma $(x, y, z, w) = (1 - 2t, -3s, s, t)$.