Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

SOLUZIONI TUTORATO 6
10 APRILE 2014

1. Si determinino esplicitamente, al variare del parametro k, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando in caso di soluzione unica il metodo di Cramer:

$$(a)\begin{cases} 2y+kz=1 \\ kx+2y=2 \\ y+kz=3 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} kx+z=k \\ ky+3z=k \\ 2x+ky+z=k \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 3x+ky+2z=1 \\ 5x+ky+kz=0 \\ x+kz=1 \end{cases} \quad (d)\begin{cases} x+kz+w=1 \\ x+2y+kz+w=0 \\ z+2w=2 \\ x+kw=0 \end{cases}.$$

SOLUZIONE:
Nella risoluzione dei sistemi denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema e con b la colonna delle soluzioni.

$(a) Det(A)=-k^2$.
Se $k\neq 0$ si ha che $r(A)=3$ e quindi $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(\frac{6}{k};-2;\frac{5}{k}\right)$.
Se invece $k=0$ il sistema risulta essere incompatibile in quanto $r(A)=1$ e $r(A|b)=2$.

$(b) Det(A)=-2k(k+1)$.
Se $k\neq 0;-1$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $\left(\frac{k}{k+1};\frac{k-2}{k+1};\frac{k}{k+1}\right)$.
Se $k=0$ allora il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(0;t;0)$.
Se $k=-1$ allora il sistema risulta incompatibile.

$(c) Det(A)=-2k(k-2)$.
Se $k\neq 0;-2$ allora $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(-\frac{k+4}{2k-4};\frac{5k+2}{k(2k-4)};\frac{3}{2k-4}\right)$.
Se $k=0$ il sistema risulta incompatibile.
Se $k=2$ il sistema risulta ugualmente incompatibile.

$(d) Det(A)=6k-2$.
Se $k\neq\frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione del tipo: $\left(-\frac{k(2k+1)}{3k-1};-\frac{1}{2};\frac{2k}{3k-1};\frac{2k-1}{3k-1}\right)$.
Se $k=\frac{1}{3}$ il sistema risulta incompatibile.

2. Si dimostri che $det(M) = \pm 1$, con $M \in O_n(K)$ (gruppo delle matrici ortogonali $n \cdot n$ a valori in K). Si verifichi se $O_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

   SOLUZIONE:
   $\mathbb{I} = det(\mathbb{I}) = det(G\dot{G}^t) = det(G)\dot{d}et(G^t) = (det(G))^2$ da cui segue l'asserto.
   $O_n(K)$ non é un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ perché, come si puó facilmente verificare, non contiene la matrice nulla.

3. Verificare con un esempio che $Det(A + B) \neq Det(A) + Det(B)$.

   SOLUZIONE:
   Un semplice esempio: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$.

4. Si calcoli determinante e rango delle seguenti matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;
   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;
   $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   SOLUZIONE:
   $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 10) - 2(3 - 4) = 1$,
   quindi si ha che $rank(A) = 3, (det(A) \neq 0)$;
   $det(B) = 0$ poichè ha tutte le righe uguali (ne bastano due) e $rank(B) = 1$ (basta sfruttare la definizione di rango di una matrice come numero di righe linearmente indipendenti);
   $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2(1-2) =$ 2, da cui $rank(C) = 3$.
   $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3$, da cui $rank(D) = 3$.
   $det(E) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$
   $2 + 2(1 - 2) = 0$,
   quindi $rank(E) < 3$ in quanto la matrice ha determinante nullo (il rango

non é massimo) ma $rank(E) \geq 2$ perché $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow rank(E) = 2$ (ho trovato un minore non nullo di ordine 2).

5. Determinare se le matrici dell'esercizio precedente sono invertibili e in tal caso calcolarne l'inversa.

SOLUZIONE:
Sono invertibili le matrici quadrate di rango massimo quindi possiamo calcolare A^{-1}, C^{-1} e D^{-1}. Lo facciamo con la seguente formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Cof(A)^{\mathrm{T}}$$

dove $Cof(A)^{\mathrm{T}}$ è la matrice cofattore di A trasposta.
Le inverse trovate sono:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $D^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Stabilire, al variare del parametro reale a, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolarne il rango.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE:
$det(A) = 2a^2 - 4$.
Se $a \neq \pm\sqrt{2}$ allora A é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{a^2-2} & \frac{-a+1}{2a^2-4} & \frac{3a-1}{2a^2-4} \\ \frac{a}{a^2-2} & \frac{-a+2}{2a^2-4} & \frac{a-6}{2a^2-4} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{2}$ si ha che $r(A) = 2$, quindi la matrice non é invertibile.
$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

SOLUZIONE:
$det(B) = 2a^2 - 3$.
Se $a \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ allora B é invertibile e la sua inversa é:

$$\frac{1}{2a^2-3} \begin{pmatrix} a^2-1 & a & -a^2 \\ -a^2+2 & a & a^2-3 \\ -a & -3 & 3a \end{pmatrix}$$

Se invece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha che $r(B) = 2$, quindi B non é invertibile.

$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

SOLUZIONE:
$det(C) = a(a-2)(a+1)$.
Se $a \neq 0, 2, -1$ allora C é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & -\frac{1}{a^2-a-2} \\ \frac{2}{a^2-a-2} & \frac{a+2}{a^2+a} & -\frac{a}{a^2-a-2} \\ -\frac{2}{a^2-a-2} & -\frac{1}{a^2+a} & \frac{a}{a^2-a-2} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 0, 2, -1$ si ha che $r(C) = 2$, quindi C non é invertibile.

$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

SOLUZIONE:
$det(D) = a^3 + a^2 + a + 1 = (a+1)(a^2+1)$.
Se $a \neq -1$ allora D é invertibile e la sua inversa é:

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+1} & \frac{a}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a-1}{-a^2-1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & \frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -\frac{a^2+a+1}{a^3+a2+a+1} \\ \frac{1}{a^2+1} & -\frac{a^2}{a^3+a^2+a+1} & \frac{-a^2+a}{-a^2-1} & -\frac{a^3}{a^3+a^2+a+1} \\ -\frac{1}{a^2+1} & -\frac{1}{a^3+a^2+a+1} & \frac{a+1}{a^2+1} & -\frac{a}{a^3+a^2+a+1} \end{pmatrix}$$

Se invece $a = -1$ allora $r(D) = 3$, quindi la matrice D non é invertibile.