Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 7
24 Aprile 2014

1. Stabilire se i punti A,B,$C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene.Quando c'é un parametro, discuterlo.

   (a) $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 6)$
   (b) $A = (5, 4)$, $B = (4, 6)$, $C = (2, 1)$
   (c) $A = (2, 1)$, $B = (3, k + 1)$, $C = (2 + k, 2)$

   SOLUZIONE:
   Affinché A, B e C siano allineati, deve essere $\text{Rank}\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{BC} \end{pmatrix} = 1$;
   quindi in questo caso i punti sono allineati.
   Per trovare la retta che li contiene, notiamo innanzitutto che se tre punti sono allineati é sufficiente considerare la retta che ne contiene due qualunque distinti, siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Basta imporre che per qualsiasi punto (x, y) sulla retta i vettori $(x - x_1, y - y_1)$ e $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ siano allineati, ovvero:

   $$\text{Rank}\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 1$$

   (a) In questo caso, prendendo $P_1 = A$ e $P_2 = B$ troviamo che la retta é $3x - y - 3 = 0$.
   (b) I punti non sono allineati.
   (c) Allineati per $k = \pm 1$.
   Per $k = 1$ la retta é $x - y - 1 = 0$; per $k = -1$ la retta é $x + y - 3 = 0$.

2. Si scrivano l'equazione del piano E soddisfacente alle seguenti proprietá:
   (a) passante per $A(1, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 2, 3)$.
   (b) passante per $B(0, 1, 1)$ e $C(3, 2, 1)$ e parallelo a $w = (0, 0, 5)$.

   SOLUZIONE:Per quanto riguarda il primo punto abbiamo gratis tutte le informazioni necessarie per determinare le equazioni parametriche del piano cercato che risulta essere passante per A ed avere giacitura $< u, v >$.
   Per quanto riguarda il secondo punto scegliamo B come punto noto ed otteniamo che la giacitura del piano é $< (3, 1, 0), w >$ e possiamo procedere nel calcolare l'equazione cartesiana in maniera usuale.
   Le soluzioni trovate sono:
   (a) $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   (b) $x - 3y + 3 = 0$.

3. Dati i seguenti sottospazi affini si trovi una base della loro giacitura:
(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_3 - x_4 = e\}$;
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + z - 5y = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 5\}$;
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -1 \wedge x = 2\}$.

SOLUZIONE:
La giacitura in tutti questi casi coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a quelli proposti, ossia al sistema che ha tutti zero al posto dei termini noti.
(a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$;
(b) $\{(5, 0, 5)\}$;
(c) $\{(0, 1, 0)\}$.

4. Verificare che le rette:$r : x+2y+z-1 = x-3z+3 = 0$ $s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = z$ sono parallele, e trovare l'equazione del piano E che le contiene.

SOLUZIONE:
Calcoliamo la loro giacitura v e verifichiamo quindi che sono parallele.
Poi calcoliamo due punti R e S rispettivamente appartenenti a r e s e calcoliamo l'equazione del piano passante per R e di giacitura $< v; \vec{SR} >$.
Le soluzioni trovate sono: $R = (0; 0; 1)$; $S = (1; 2; 0)$ e $E : y + 2z = 0$.

5. Sia $A^2(\mathbb{R})$ il $2-spazio$ affine numerico, sia $O\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2$ il sistema di riferimento standard:
(a) si trovino le equazioni parametriche e cartesiana della retta r passante per $P = (1, 2)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2})$;
(b) si consideri la retta s passante per i punti $Q = (0, -\frac{3}{2})$ e $R = (-1, 2)$, si trovino le equazioni parametriche e cartesiana;
(c) r e s sono sghembe? Sono parallele? Sono incidenti? (Giustificare la risposta);
(d) si trovino gli eventuali punti in comune;
(e) si determinino le equazione della retta π del fascio proprio con centro il punto $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$ passante per $O = (0, 0)$;
(f) si scriva l'equazione del fascio improprio di rette parallele a π.

SOLUZIONE:
(a)$x + 2y - 5 = 0, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$;
(b)$7x + 2y + 3 = 0, \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t \end{cases}$;
(c) Due rette nel piano non possono essere sghembe, non sono parallele perché non hanno la stessa giacitura, quindi sono incidenti.
(d) Il punto in comune é $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$;
(e)$19x + 8y = 0$;
(f)$19x + 8y + t = 0$.

6. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(a) Sia r la retta di equazioni cartesiane: $r : \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Determinare le equazioni parametriche di r.

(b) Sia s la retta di equazioni cartesiane: $s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il loro punto di intersezione.

(c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (1, 0, 1)$.

(d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (1, -1, 4)$.

(e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

SOLUZIONE:

(a) Per trovare un vettore di direzione della retta r basta imporre $w = (l, m, n)$ dove $l = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $m = -det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $n = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Prendendo il punto $(-1, 1, 0)$ (andava bene un qualsiasi punto della retta) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}.$$

(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s; allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $det(A) = 0$.In questo caso si vede che $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$.

Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano p' tale che p' contiene sia la retta r che il punto P(equivalentemente che esiste un unico piano p'' tale che p'' contiene sia la retta s che il punto P), inoltre i piani p' e p'' sono distinti (altrimenti r ed s sarebbero complanari) ed hanno un punto in comune, quindi $p' \cup p'' = t$ come richiesto. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r, $\lambda(x+2z+1)+\mu(2x+y+3z+1) = 0$, imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $4\lambda + 6\mu = 0$, scegliendo ad esempio $\lambda = -3$ e $\mu = 2$ (andavano bene due qualsiasi valori di λ e di μ che risolvevano l'equazione)troviamo il piano $p' : x + 2y - 1 = 0$; utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s, $\lambda(x+1)+\mu(2x+3y+1) = 0$ imponiamo il passaggio per il punto P e otteniamo $2\lambda + 3\mu = 0$ allora $p'' : x + 6y - 1 = 0$. Allora le equazioni cartesiane di $t = p' \cup p''$:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + 6y - 1 = 0 \end{cases}.$$

(d) Le equazioni parametriche di q sono:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}.$

Scrivendo la matrice: $\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
e annullando due qualsiasi dei suoi minori otteniamo le equazioni cartesiane di q:

$\begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}.$

(e) Per vedere se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe comincio con vedere il rango della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si nota subito che $det(B) = 0$; inoltre si puó vedere che la sottomatrice $B(123|123)$ é invertibile (ha rango massimo). Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha un'unica soluzione (in altre parole le rette sono incidenti) e il punto di intersezione é il punto $(1, 0, 0)$.

7. Date le seguenti n-uple di punti in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ fornire: dimensione, giacitura, equazioni cartesiane, equazioni parametriche del sottospazio minimo di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ che le contiene.
$A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 3, 3)\}$
$B = \{(1, 2, 1), (2, 5, 2), (-1, -3, -1)\}$
$C = \{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$
$D = \{(1, 4, 2), (1, 5, 3), (1, 1, 1)\}$
$E = \left\{(0, 1, 1), (4, 3, 2), (2, 2, \frac{3}{2})\right\}$
$F = \{(3, 2, 7), (2, 1, 2), (0, 0, 1)\}$
$G = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (3, 3, 3), (5, 0, 2)\}$
$H = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (4, 1, 0), (5, 0, -1)\}$

SOLUZIONE:
Dati n punti $\{P_1; \dots; P_n\} \in A^3(\mathbb{R})$ per trovare il sottospazio minimo che li contiene ne scegliamo uno, sia P_i, e imponiamo che questo sia il nostro punto noto; poi otteniamo la giacituira nel seguente modo:

$$W = < Pj >_{j \neq i}$$

Si prosegue con il calcolo delle equazioni parametriche e cartesiane nel modo usuale. Le equazioni trovate sono: $A : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$

$B : \begin{cases} x = 1 + u - 2v \\ y = 2 + 3u - 5v \\ z = 1 + u - 2v \end{cases} ; z - x = 0.$

$$C : \begin{cases} x = u + 3v \\ y = 2u + 2v \\ z = 3u + v \end{cases} \quad ; \; 4x - 7y + 4z = 0.$$

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3u + 4v \\ z = 1 + u + 2v \end{cases} \quad ; \; x - 1 = 0.$$

$$E : \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad ; \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

$$F : \begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 1 + 2u + v \\ z = 1 + 6u + v \end{cases} \quad ; \; -2x + 6y - z + 1 = 0.$$

G: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

H: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

8. Confrontare la retta: $\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ con i sottospazi A, B, C, D dell'esercizio precedente e dire per ognuno di essi se risulta essere contenuta, parallela,coincidente, incidente o sgemba con il sottospazio. Inoltre nel caso di incidenza fornire il punto di incidenza.

SOLUZIONE:
Per risolvere questo esercizio bisogna confrontare le giaciture della retta e dei sottospazi per determinare il parallelismo o il non parallelismo. In seguito mettiamo a sistema le equazioni cartesiane per determinare i punti di incidenza.
Queste due informazioni sono sufficienti per determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini.
Le soluzioni trovate sono:
A e r sono coincidenti;
B e r sono incidenti nel punto $(1; 1; 1)$;
C e r sono incidenti nel punto $(1; \frac{3}{4}; \frac{3}{4})$;
D contiene r.