Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 8
8 Maggio 2014

1. Descrivere con equazioni cartesiane i seguenti sottospazi affini di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ descritti in equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 + u + v \end{cases} ; \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 7t \\ z = 1 + 9t \end{cases} ; \begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = v - u \\ z = 2 + 3u \end{cases}$$

SOLUZIONE:
Le equazioni cartesiane corrispondenti sono rispettivamente:

$$-x - y + z - 2 = 0 \; ; \begin{cases} 7x - 3y - 4 = 0 \\ 9x - 3z - 6 = 0 \end{cases} ; -3x + 3y + 2z - 1 = 0$$

2. Rappresentare con equazioni parametriche e cartesiane le seguenti rette:

   (a) passante per $A = (1; 2; 1)$ e parallela alla retta $s : x - 1 = 2y + 3 = 1 - z$.

   (b) passante per $B = (1; 2; 1)$ e parallela ai piani $E : x + y - 1 = 0$ e $F : 2y + 3 = 0$.

SOLUZIONE:

(a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases} ; \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

3. In $\mathbb{A}^3$ si scriva l'equazione del piano α passante per i punti $A = (1; 0; 0)$; $B = (2; 1; 1)$ e $D = (0; 1; 1)$ e l'equazione del piano β contenente le rette:

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases} \quad \text{e } s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$$

Infine si determini se i due piani sono paralleli o incidenti.

SOLUZIONE:
$\vec{AB} = (1;1;1)$ e $\vec{AD} = (-1;1;1)$ quindi $giac(\alpha) =< (1;1;1);(-1;1;1) >$.
Le equazioni parametriche di α saranno:
$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = t + s \\ z = t + s \end{cases}$$
$y = z$ risulta dunque essere l'equazione cartesiana di α.
Per trovare la giacitura di r basta risolvere il sistema omogeneo determinato dalle equazioni cartesiane di r.
Otteniamo che $giac(r) =< (1;0;0) >$.
Allo stesso modo si ha che $giac(s) =< (1;4;1) >$.
Il piano β avrá equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 4s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$ e, come prima, si nota immediatamente che $x = z$ che corrisponde all'equazione cartesiana di β.
I due piani sono incidenti.

4. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\}$?

   SOLUZIONE:
   Per vedere se puó esistere un'applicazione del genere cerco una base del nucleo dell'ipotetica f.
   $Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 2z = 0\}$, quindi un vettore tipo del nucleo sará della forma $(-2y, y, 0, t)$, con $y, t \in \mathbb{R}$, da cui deduciamo che $dim(Ker(f)) = 2 \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$, per il teorema della nullitá piú rango. Dunque non puó esistere un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, in quanto la dimensione dell'immagine é in ogni caso minore della dimensione del codominio.

5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da
$$f(x, y, z) := (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$$
   (a) Dire se f é suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore v t.c. $f^{-1}(v) = \emptyset$.
   (b) Dire se f é iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori a e b in $\mathbb{R}^3$ t.c. $a \neq b$ ma $f(a) = f(b)$.
   (c) Sia $E :=< u; w >$, dove $u = (1;0;1)$;$w = (0;1;1)$. Dire se il vettore $x = (4;3;-2) \in f(E)$.

   SOLUZIONE:

   (a) Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$ dove con e_i, $i = 1, 2, 3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che f non é suriettiva perché lo spazio di arrivo ha dimensione tre mentre $dim(Im(f)) = 2$. Il vettore cercato sará un qualsiasi vettore che non appartiene all'immagine, quindi un vettore che non puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base di $Im(f)$; basta prendere un vettore che sia linearmente indipendente rispetto ad essi per esempio $v := (0, 1, 0)$.

(b) L'operatore non é iniettivo perché per il teorema nullitá piú rango il suo nucleo non é banale (ha dimensione 1).Per trovare i vettori cercati mi genero un vettore del kernel non nullo attraverso il sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per esempio sia $k = (1; -1; -1)$. Quindi abbiamo che $f(v) = f(v+k)$ ma $v \neq v + k \quad \forall v \notin ker(f)$.

(c) $f(E)$ é il sottospazio $< f(v); f(w) >=< (2; 2; -1); (2; 1; 1) >$. Quindi si ha che $x \in f(E)$ se puó essere scritto come combinazione lineare della base, ossia deve essere nullo il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

. Tuttavia tale determinante é diverso da 0, quindi $x \notin f(E)$.

6. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:

(a) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$;

(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita come $(x, y) \longrightarrow (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$;

(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (x + y - z, x - y + z)$.

SOLUZIONE:

(a) Cominciamo con il verificare che F é un'applicazione lineare. Presi $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che:
$F(v + w) = F(a + d, b + e, c + f) = (2(c + f) - (a + d), (a + d) + (b + e), (a + d) + 2(b + e) + 2(c + f)) =$
$= ((2c - a) + (2f - d), (a + b) + (d + e), (a + 2b + 2c) + (d + 2e + 2f)) =$
$(2c - a, a + b, a + 2b + 2c) + (2f - d, d + e, d + 2e + 2f) = F(v) + F(w)$.
Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$, con $v = (a, b, c)$, vale
$F(kv) = F(ka, kb, kc) = (2kc - ka, ka + kb, ka + 2kb + 2kc) =$
$= (k(2c - a), k(a + b), k(a + 2b + 2c)) = k(2c - a, a + b, a + 2b + 2c) =$
$kF(v)$.
Per determinare l'immagine basta osservare che in generale

$Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$ dove con e_i, $i = 1, 2, 3$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che
$Im(F) =< (-1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 0, 2) >=< (0, 1, 2), (2, 0, 2) >$, possiamo quindi concludere che $dim(Im(F)) = 2$ e che, per il teorema del rango piú nullitá abbiamo che $dim(ker(F)) = 1$. Per determinare il nucleo di F basta porre $F(v) = (0, 0, 0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non é l'unico modo di trovare le soluzioni), cosí facendo troviamo che
$ker(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (t, -t; \frac{t}{2}), t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $Im(F) =< (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) >$, $ker(F) = (0, 0)$.

(c) $Im(F) =< (1, 1), (-1, 1), (-1, 1) >=< (1, 1), (-1, 1) >= \mathbb{R}^2$. Il nucleo avrá quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(v) = (0, 0)$ e otteniamo $ker(F) = (0, t, t)$.