Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 10
22 Maggio 2014

1. Siano A e B due matrici simili; si dimostri che:
   (a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;
   (b) Tr(A)=Tr(B);
   (c) A^n e B^n sono simili.

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

3. Data la matrice:
$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$:
   (a) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$.
   (b) Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di A linearmente indipendenti?

4. Si consideri la matrice simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};
   (b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;
   (c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale.

5. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A è diagonalizzabile.

7. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari:
$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associate, rispettivamente, alle matrici:
$A = M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare la dimensione e una base sia per $\ker(gof)$ sia per $\mathrm{Im}(gof)$.

   (b) Sia H l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap \ker(gof)$.

   (c) Calcolare $(gof)(H)$ e $(gof)^{-1}(K)$, dove K é l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_2 = 0$.

8. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(x; y; z; t) = (x + 2y - t; y - 3z; x + 2y + z + t)$$

   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche.

   (b) Verifica che $C = \{(0; 3; 1); (1; 0; 3); (0; -1; 1)\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$.

   (c) Completa i vettori $v = (1; 0; 0; 1)$ e $u = (0; 2; 0; 0)$ a una base B di $\mathbb{R}^4$.

   (d) Scrivi la matrice D associata a T rispetto alle basi C e B.