

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 11

29 MAGGIO 2014

1. *Secondo esonero a.a. 2011-2012*

Siano $k \in \mathbb{R}$; $v_1 = (1; -1; 0; 0)$; $v_2 = (1; 1; 1; 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che:

$$v_1 \in N(F), \quad v_2 \in N(F), \quad F(E_2) = E_2 + kE_4, \quad F(E_4) = E_2 + v_1$$

dove $\{E_1; E_2; E_3; E_4\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^4 .

- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F .
- Trovare le dimensioni degli autospazi di F . Inoltre, individuato, per un opportuno k , un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica diversa da 1, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ .
- Determinare i valori di k per cui F è diagonalizzabile.

2. *Secondo esonero a.a. 2004-2005*

Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$

e siano $v = e_2 - e_3$, $w = (a - 5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$.

Sia $F : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare t.c.

$$F(e_1 + v) = w, \quad F(e_1) = ae_1 + 2e_3, \quad F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2$$

- Determinare una matrice di F ;
- Trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di F ;
- Determinare gli autovalori di a per i quali F è diagonalizzabile.

3. *Secondo esonero a.a. 2003-2004*

Sia α un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che, considerata la base canonica $\{E_1; E_2; E_3; E_4\}$ di \mathbb{R}^4 , si ha

$$F(E_1) = E_2; \quad F(E_2) = 2E_2; \quad F(E_3) = E_1 + E_3; \quad F(E_4) = E_1 + \alpha E_4$$

- Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica;
- Trovare, per ogni α , basi per gli autospazi di F ;
- Determinare i valori di α per i quali esiste una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

4. *Secondo esonero a.a. 2011-2012*

Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $O; e_1; e_2; e_3; e_4$ un

riferimento affine e siano $X; Y; Z; W$ le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} 3X + Y = 1 \\ X + Y + Z + W = 0 \end{cases} \quad T_k : \begin{cases} X + Y + W = -1 \\ Z - W = 0 \\ kX + kY + Z + W = 0 \end{cases}$$

- Calcolare la dimensione di S e di T_k .
- Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.
- Dimostrare che se c' è un iperpiano di A che contiene S e T_k allora $k = 1$.

5. *Secondo esonero a.a. 2002-2003*

In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Sia $A(0, 0, 2)$ un punto e si considerino le due rette:

$$r_1 : \begin{cases} 3X - Y - 1 = 0 \\ -3X - 2Y + 7 = 0 \end{cases} ; r_2 : \begin{cases} 3X - 4Y - 11 = 0 \\ X - 4Z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?
- Determinare l'equazione cartesiana del piano affine p contenente r_1 e parallelo a r_2 .
- Determinare tutti i punti $P \in p$ tali che la retta PA è incidente r_2 , ma non è incidente r_1 .

6. *Appello A a.a. 2012-2013*

Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e $U \subset V$ un sottospazio tale che $\text{Im}(F)$ e $N(F) \oplus U$ hanno la stessa dimensione (finita).

- Dimostrare che esiste un sottospazio U' di V tale che $N(F) \subset U'$ e $V/U' \cong N(F) \oplus U$;
- Dimostrare che se V ha dimensione finita allora U' è unico e $\dim V + \dim U$ è pari.

7. *Secondo esonero a.a. 2003-2004*

Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \rightarrow V; F : V \rightarrow W$ due applicazioni lineari.

- Si dimostri che se $F \circ G$ è suriettiva allora F è suriettiva;
- Si supponga ora che F è suriettiva. Si dimostri che $F \circ G$ è suriettiva se e solo se $N(F) + \text{Im}G = V$;
- si costruisca un esempio esplicito in cui $F \circ G$ è suriettiva e $N(F) \oplus \text{Im}G = V$.