Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 1
27 FEBBRAIO 2014

1. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. É vero che:
   a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;
   b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   Altrimenti qual é l'ipotesi mancante?

2. Sia $C \in M_2(\mathbb{C})$, $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, svolgere le seguenti operazioni:
   - $iC^2 + 3C + i\mathbb{I}_2$;
   - $3C^2 + 7C^3$;
   - ${}^tC\,C$.

3. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
   $C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   Calcolare ove possibile:
   - ${}^tA$; ${}^tC$, AC, ${}^tA\,C, {}^tA\,{}^tC$, ${}^tC\,{}^tA$;
   - ACD, $3(AC+B)D^2$.

4. Mostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente di ordine 3.

5. Dimostrare che se una matrice quadrata é nilpotente allora non puó essere invertibile.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

   $$B = \lambda\mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

   dove $\lambda, x \in R$.

7. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2x2}(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I é chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici.