Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 3
13 Marzo 2013

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
   Se possibile, si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1, 1, 1)$
   - $v_1 = (1, 3, 2),\ v_2 = (2, 1, -1),\ v_3 = (1, 2, -2)$
   - $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (2, 0, 6),\ v_3 = (2, 3, 0)$
   - $v_1 = (4, 2, 1),\ v_2 = (2, 1, 1),\ v_3 = (4, 0, 5),\ v_4 = (1, 1, 0)$
   - $v_1 = (3, -5, 2),\ v_2 = (1, 3, -1)$
2. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
   a)$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \text{ tc } a, b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
   b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
   Si calcoli inoltre la loro dimensione.
3. Si determinino le coordinate dei vettori di
   $v_1 = (3, 2, -5),\ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
   rispetto alle seguenti basi:
   - (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
   - (b) La base $B = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$
4. Dati i seguenti vettori:
   $a := (1; 3; 2)$
   $b := (-2; k - 6; k + 4)$
   $c := (-1; k - 3; k^2 + k + 1)$
   $d := (0; -2; k - 1)$
   - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a, b, c\}$ sono linearmente indipendenti.
   - Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a, b, c\}$.
5. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a := (1, 1, -1) b := (2, -1, 1)$; sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c := (1, 2, -1) d := (-1, -1, 2)$; Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

6. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
   $W_1 := \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.

   - Si verifichi che W_1 é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
   - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
     $a := (0, 3, 1, -2, 0)$, $b := (0, 0, 2, 1, 1)$, $c := (0, 6, -10, -10, -6)$, $d := (0, 3, 7, 1, 3)$ se ne determini una base e la dimensione.
   - Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$.
   - Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

7. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
   $a := (1, 1, 0)$, $b := (0, 1, -1)$, $d := (2, 3, -1)$.
   Considerata l'equazione vettoriale:
   $x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$
   determinare, se possibile, un vettore $c := (x, y, z)$ nei seguenti casi:

   - L'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
   - L'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;
   - L'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni;
   - quand' é possibile determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

8. Si dica se l'insieme delle coppie reali (complesse) (x, y) soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ é un sottospazio vettoriale di R^2 ($\mathbb{C}^2$).

9. Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n (reali o complesse):

   (a) Matrici antisimmetriche;
   (b) Matrici triangolari superiori;
   (c) Matrici invertibili;
   (d) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 0;
   (e) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 1 (matrice nulla compresa).

   Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n.