Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 4
20 MARZO 2014

1. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ é una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

2. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x + 2y = 2t = 0\}$
$K = < (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$.
   (a) Determinare la dimensione e una base di H, K, $H + K$ e $H \cap K$
   (b) Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:
   (a) Provare che i sottoinsiemi:
   $F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}$
   $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = -XA\}$
   sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
   (b) Determinare una base per i sottospazi vettoriali F, G, $F + G$, $F \cap G$.
   (c) Data la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$ stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.
   (d) Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.

4. Calcolare il rango delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;
$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare il rango delle matrici A e B al variare di $a \in \mathbb{R}$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \quad p_3(x) = x - x^2$$

Esprimere, se possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$.

7. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

   (a) Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema é compatibile.

   (b) Esistono valori di k per i quali il sistema ammette infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.

8. Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$