Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 9
15 MAGGIO 2014

1. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}$, con $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, associata ad un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ (rispetto alla base canonica).
É possibile determinare univocamente A sapendo che f non é iniettiva e che: $f(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2)$?

2. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, é:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calcolare $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f))$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f))$.

3. In R^3 si considerino le basi:
$$B_1 = \{(1;1;1);(0;2;3);(1;0;3)\} \text{ e } B_2 = \{(4;3;1);(0;1;2);(1;0;1)\}$$
Determinare la matrice P del cambiamento di base da B_1 a B_2.
Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_2 a B_1.

4. Sia P^3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado minore di 3 a coefficienti reali e $F : P^3 \to P^3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = nX^{n-1}$ (derivata formale). Calcolare nucleo e immagine di F e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e é la base $\{1; X; X^2; X^3\}$ e b é la base $\{1; 1+X; 1+X+X^2; 1+X+X^2+X^3\}$.

5. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, é associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
Trovato il valore di h per cui f non é suriettiva:
   (a) determinare $\mathrm{Im}(f)$;
   (b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$;
   (c) trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   (d) determinare $\mathrm{Ker}(f)$;
   (e) verificare che $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\underline{0}\}$;

(f) esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$?

(g) trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1, 2, -1)$.

6. In R^3 si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

(a) f é iniettivo? f é suriettivo?

(b) Trovare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Determinare $\{t \in R | v = (t + 1; 2t; -1) \in \mathrm{Im}(f)\}$.

(d) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $\mathrm{Im}(f)$.

(e) Trovare un vettore x che non appartenga all'immagine.

(f) $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono in somma diretta?

(g) Determinare le controimmagini del vettore $u = (3; 4; -1)$.

7. Siano $v = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$ e $w = \{(1; 0; 1; 1); (1; 1; 1; 0); (0; 1; 1; 1); (1; 1; 0; 1)\}$ due basi rispettivamente di R^3 e R^4 e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : R^3 \to R^3 : F(x; y; z) = (x + z; x + 2y; 2x + 3y + z)$;
$G : R^3 \to R^4 : G(x; y; z) = (x + z; x + y + z; x + y + 2z; 2x + y + 2z)$;
$H : R^4 \to R^3 : H(x; y; z; t) = (x + 2z + t; x - y - z + t; y - t)$;
$I : R^4 \to R^4 : I(x; y; z; t) = (x + z + t; 2x + y + t; x - y - 2z + t; y - z + t)$.
Determinare le matrici associate a tali applicazioni:
$M_v(F); M_{w;v}(G); M_{v;w}(H)$ e $M_w(I)$.