**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GE110 - Geometria 1**

**a.a. 2014-2015**

**Prova scritta del 10-7-2015**

**TESTO E SOLUZIONI**

**Avvertenze:**

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

**1.** Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 = -1 \\ -kX_1 - kX_2 + (1+k)X_3 - X_4 = 2 + k^2 - k \\ kX_1 - X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare i valori di $k$ per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

**N.B.** PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

**SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:**

**(ovviamente valida anche come scritto)**

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -k & -k & k+1 & -1 & k^2-k+2 \\ k & -1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando $R_1$ con $R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 & 1 \\ -k & -k & k+1 & -1 & k^2-k+2 \\ k & -1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 + kR_1, R_4 \to R_4 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -k-1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 & k^2-2k+2 \\ 0 & -k-1 & -k & 0 & k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -k-1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & -k-1 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_3$, si trova la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -k-1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2-k \end{pmatrix}.$$

Dunque si vede subito che il sistema è compatibile se e solo se $k^2 - k = 0$, ovvero se e solo se $k = 0, 1$.

In tal caso il sistema è a gradini e si trovano facilmente le soluzioni per $t \in \mathbb{R}$

$$k = 0, X_4 = t, X_3 = t + 2, X_2 = 0, X_1 = -1$$

e

$$k = 1, X_4 = t, X_3 = \frac{t+1}{2}, X_2 = -\frac{t+3}{4}, X_1 = \frac{t-1}{4}. \quad \blacksquare$$

**SOLUZIONE COME SCRITTO:**

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -k & k+1 & -1 \\ k & -1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 0$ mentre

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k & 0 \end{vmatrix} = k$$

quindi $r(A) = 3$ se $k \neq 0$. Se $k = 0$ abbiamo il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

pertanto $r(A) = 3$ per ogni $k$. Ora calcoliamo il rango di

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -k & -k & k+1 & -1 & k^2-k+2 \\ k & -1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ basta orlare la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene o $\det A = 0$ oppure

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -k & k+1 & -1 & k^2-k+2 \\ -1 & -k & 0 & 0 \end{vmatrix} = k^2(1-k)$$

da cui deduciamo che

$$r(A\ b) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, 1 \\ 3 & \text{se } k = 1 \end{cases}.$$

Se $k = 0$ basta orlare la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene o $\det A = 0$ oppure

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

da cui deduciamo che $r(A\ b) = 3$ se $k = 0$.
Quindi

$$r(A\ b) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, 1 \\ 3 & \text{se } k = 0, 1 \end{cases}.$$

Ne segue che $r(A) = r(A\ b)$ se e solo se $k = 0, 1$. Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k = 0, 1$ e possiamo calcolare la soluzione con la regola di Cramer.
Per $k = 0$ e scegliamo il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Posto $X_4 = t$ si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2+t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1, \; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2+t & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0, \; X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+t \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+t \end{vmatrix}}{1} = t+2.$$

Per $k = 1$ e scegliamo il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Posto $X_4 = t$ si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{(-4)} = \frac{t-1}{4}, \; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{(-4)} = -\frac{t+3}{4}, \; X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1+t \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{(-4)} = \frac{t+1}{2}. \blacksquare$$

**2.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -k \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Determinare la dimensione di $U$.

(b) Determinare tutti i sottospazi $W$ di $M_2(\mathbb{R})$ tali che

$$U \oplus W = M_2(\mathbb{R}).$$

(c) Siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si determinino (se esistono) tutti i valori di $k$ per i quali $< B_k, C_k > \subseteq U$.

**N.B.** PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

**SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:**

(a) Utilizzando l'isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ lavoriamo direttamente su $\mathbb{R}^4$.

Per calcolare la dimensione di $U$ facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -k \end{pmatrix}.$$

Scambiando $R_1$ con $R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 + R_3, R_4 \to R_4 + R_3$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_4 \to R_4 + R_1$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix}$$

da cui si deduce subito che $\dim U = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0,2 \\ 4 & \text{se } k \neq 0,2 \end{cases}$ e, se $k = 0,2$, una sua base è $\{D_1, D_2, D_3\}$ dove

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare osserviamo che $U = M_2(\mathbb{R})$ se $k \neq 0,2$.

(b) Sia $W$ un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$. In base alla (a), se $k \neq 0,2$ deve necessariamente essere $W = \{0\}$ e ovviamente ciò è anche sufficiente. Invece se $k = 0,2$ allora $W$ deve avere dimensione 1, dunque generato da una matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che

$$r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}) = 4.$$

Ora facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_4 \to R_4 - cR_3$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & d \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_4 \to R_4 - aR_1$ da la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & d-2a \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & d-2a \end{pmatrix}$$

che ha rango 4 se e solo se $b \neq 0$. Se $k = 2$, facendo in $E$ l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{b}{2}R_2$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-2a+\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

da cui la condizione $d - 2a + \frac{b}{2} \neq 0$, ovvero $4a - b - 2d \neq 0$.

(c) Se $k \neq 0, 2$ sappiamo da (a) che $U = M_2(\mathbb{R})$, quindi, ovviamente, $< B_k, C_k > \subseteq U$.

Se $k = 0, 2$, sempre per la (a), si avrà $< B_k, C_k > \subseteq U$ se e solo se

$$r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}) = 3.$$

Se $k = 0$ facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_4 \to R_4 - R_1$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 e pertanto $< B_0, C_0 >\subseteq U$.

Se $k = 2$ facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4.

Si conclude che $< B_k, C_k >\subseteq U$ se e solo se $k \neq 2$. $\blacksquare$

**SOLUZIONE COME SCRITTO:**

(a) Utilizzando l'isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ lavoriamo direttamente su $\mathbb{R}^4$.

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -k \end{vmatrix} = k(k-2)$$

e quindi $\dim U = 4$ se $k \neq 0, 2$.

Se $k = 0$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

mentre se $k = 2$ si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

e quindi $\dim U = 3$ se $k \neq 0, 2$.

Dunque $\dim U = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0, 2 \\ 4 & \text{se } k \neq 0, 2 \end{cases}$ e, se $k = 0, 2$ una sua base è $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Osserviamo inoltre che $U = M_2(\mathbb{R})$ se $k \neq 0, 2$.

(b) Sia $W$ un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$. In base alla (a), se $k \neq 0, 2$ deve necessariamente essere $W = \{0\}$ e ovviamente ciò è anche sufficiente. Invece se $k = 0, 2$ allora $W$ deve avere dimensione 1, dunque generato da una matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

ovvero tale che $2ka - b - kd \neq 0$, e quindi

$$b \neq 0 \text{ se } k = 0, 4a - b - 2d \neq 0 \text{ se } k = 2.$$

(c) Se $k \neq 0, 2$ sappiamo da (a) che $U = M_2(\mathbb{R})$, quindi, ovviamente, $< B_k, C_k > \subseteq U$. Se $k = 0, 2$, sempre per la (a), si avrà $< B_k, C_k > \subseteq U$ se e solo se

$$r(\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}) = 3.$$

Se $k = 0$ abbiamo

$$r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3$$

mentre, se $k = 2$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

e quindi il rango è 4.

Si conclude che $< B_k, C_k > \subseteq U$ se e solo se $k \neq 2$. ■

**3.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e siano

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di $k$ per i quali $A$ può essere trasformata in $B$ con sole operazioni elementari;

(b) Per i valori di $k$ individuati sopra, determinare una matrice $R$, scritta come prodotto di matrici elementari, tale che $RA = B$.

**SOLUZIONE:**

(a) Facciamo prima operazioni elementari su $B$. Con le operazioni $R_1 \to R_1 - R_2, R_3 \to R_3 - R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto $r(B) = 2$. Ora facciamo operazioni elementari su $A$.

Scambiando $R_1$ con $R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2k & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - 2kR_2$ da la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -2k^2 \end{pmatrix}$$

pertanto $r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$.

Dato che le operazioni elementari preservano il rango, ne segue che, se $k \neq 0$, $A$ non può essere trasformata in $B$ con sole operazioni elementari.
Invece se $k = 0$ abbiamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e facendo l'operazione $R_3 \to R_3 + 2R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 + R_2, R_3 \to R_3 + R_2$ si ottiene $B$.
(b) Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, per $k = 0$, abbiamo allora che

$$R_{32}(1)R_{12}(1)R_{31}(2)R_{12}(1)R_{13}A = B$$

da cui

$$R = R_{32}(1)R_{12}(1)R_{31}(2)R_{12}(1)R_{13}. \blacksquare$$

**4.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = E_1, \quad F(E_1 + E_2) = kE_1 + kE_2 - E_3 - E_4,$$

$$F(2E_3) = E_1 + 2kE_3, \quad F(E_3 + E_4) = E_1 + E_2 - 3E_3 - E_4,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice, il polinomio caratteristico e gli autovalori di $F$.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di $F$; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di $F$ con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di $F$ associato a $\lambda$;
(c) Determinare i valori di $k$ per i quali $F$ è diagonalizzabile.

**SOLUZIONE:**

(a) Osserviamo che $e = \{E_1, E_1 + E_2, 2E_3, E_3 + E_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad $F$ in tale base esprimiamo le trasformate di $F$:

$$F(E_1) = E_1, \quad F(E_1 + E_2) = k(E_1 + E_2) - (E_3 + E_4),$$

$$F(2E_3) = E_1 + k(2E_3), \quad F(E_3 + E_4) = (E_1 + E_2) - (2E_3) - (E_3 + E_4).$$

Quindi

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di $F$ è (sviluppando prima per la prima colonna e poi per la seconda colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-T & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-T & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(k-T)[(k-T)(-1-T)+1] =$$

$$= (T-1)(T-k)[T^2 + (1-k)T) + 1 - k].$$

Le radici di $(T-1)(T-k)[T^2 + (1-k)T) + 1 - k] = 0$ sono

$$1, k \text{ e, se } k \leq -3 \text{ o } k \geq 1, \frac{k - 1 \pm \sqrt{k^2 + 2k - 3}}{2}.$$

Osserviamo che $1 = k$ se e solo se $k = 1$, $1 = \frac{k-1\pm\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$ se e solo se $k = \frac{3}{2}$, mentre non può accadere che $\frac{k-1\pm\sqrt{k^2+2k-3}}{2} = k$. Quindi gli autovalori di $F$ sono

**Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)**

| | |
|---|---|
| $k < -3$ o $k > 1, k \neq \frac{3}{2}$ | $\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = k$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$ (m.a. 1), |
| | $\lambda_4 = \frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$ (m.a. 1) |
| $k = -3$ | $\lambda_1 = 1$(m.a. 1), $\lambda_2 = -3$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -2$ (m.a. 2) |
| $k = 1$ | $\lambda_1 = 1$(m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 2) |
| $k = \frac{3}{2}$ | $\lambda_1 = 1$(m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ (m.a. 1) |

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di $F$ saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = 1$ posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 0I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_0(F) = 4 - 3 = 1$.
Se $k = -3$ posto $T = -2$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) + 2I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{-2}(F) = 4 - 3 = 1$.
Se $k = \frac{3}{2}$ posto $T = 1$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{\frac{3}{2}}(F) = 4 - 3 = 1$.
Infine prendiamo $\lambda_1 = 1$, nel caso $k = 1$, come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di $F$ con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \\ -w = 0 \\ -y - 2w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = z = w = 0$. Quindi gli autovettori di $F$ associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xE_1$ e una base di $V_1(F)$ è $\{E_1\}$ per $k = 1$.
(c) Per la diagonalizzabilità di $F$ abbiamo i seguenti casi:

**molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori**

1) $k < -3$ o $k > 1, k \neq \frac{3}{2}$

| autovalore | m.g. | m.a. |
|---|---|---|
| $1$ | 1 | 1 |
| $k$ | 1 | 1 |
| $\frac{k-1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$ | 1 | 1 |
| $\frac{k-1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2}$ | 1 | 1 |

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di $F$ è 4 e quindi $F$ è diagonalizzabile.

2) $k = -3$

| autovalore | m.g. | m.a. |
|---|---|---|
| $1$ | 1 | 1 |
| $-3$ | 1 | 1 |
| $-2$ | 1 | 2 |

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di $F$ è 3 e quindi $F$ non è diagonalizzabile.

3) $k = 1$

| autovalore | m.g. | m.a. |
|---|---|---|
| $1$ | 1 | 2 |
| $0$ | 1 | 2 |

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di $F$ è 2 e quindi $F$ non è diagonalizzabile.

4) $k = \frac{3}{2}$

| autovalore | m.g. | m.a. |
|---|---|---|
| $1$ | 1 | 2 |
| $\frac{3}{2}$ | 1 | 1 |
| $-\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di $F$ è 3 e quindi $F$ non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che $F$ è diagonalizzabile se e solo se $k < -3$ o $k > 1, k \neq \frac{3}{2}$. ∎

**5.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine. Sia $T_k$ il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y + Z = 1 \\ kX - kW = 2k \\ (k-1)X + Y - Z = 0 \end{cases}$$

e sia $S$ il sottospazio passante per il punto $Q = Q(1,1,0,0)$ e di giacitura $W =< e_1, e_1 + e_3 >$.

(a) Determinare per quali valori di $k$ si ha che $T_k$ è un sottospazio e calcolare le dimensioni di $T_k$ e $S$.

(b) Determinare (se esistono) tutti piani $p$ di $\mathbf{A}$ tali che $p$ è parallelo a $T_k$ e a $S$.

(c) Determinare per quali valori di $k$ esiste un iperpiano $H$ di $\mathbf{A}$ tale che $H$ contiene $S$ e $T_k$.

**SOLUZIONE:**

(a) Sappiamo dalla teoria che, affinchè $T_k$ sia un sottospazio, è necessario e sufficiente che sia non vuoto. Consideriamo allora le matrici del sistema che definisce $T_k$:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & -k \\ k-1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & -k & 2k \\ k-1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & -k \\ k-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2$$

pertanto $r(B_k) = 3$ se $k \neq 0$ e ovviamente in tal caso anche $r(C_k) = 3$. Invece se $k = 0$ si ha

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che si vede facilmente avere rango 1, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

quindi $r(C_0) \geq 2$. Allora $r(B_k) = r(C_k)$ se e solo se $k \neq 0$ e per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ se e solo se $k \neq 0$. Dunque $T_k$ è un sottospazio se e solo se $k \neq 0$ e, in tal caso,

$$\dim T_k = \dim \mathbf{A} - r(B_k) = 4 - 3 = 1.$$

Da ora in poi considereremo solo il caso $k \neq 0$.

Invece $\dim S = \dim W = 2$.

(b) Sia $p$ un piano di $\mathbf{A}$ tali che $p$ è parallelo a $T_k$ e a $S$. Allora, essendo $\dim S = 2$, si ha $\text{giac}(p) = W$ e dunque $\text{giac}(T_k) \subset W$. La giacitura di $T_k$ è data dal sistema omogeneo

$$\text{giac}(T_k) : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ kX - kW = 0 \\ (k-1)X + Y - Z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$X = 0, Y = t, Z = t, W = 0$$

da cui la giacitura di $T_k$ è data dai vettori $te_2 + te_3 = t(e_2 + e_3)$. Ma $e_2 + e_3 \notin W$ e quindi per nessun valore di $k$ esiste un piano $p$ di $\mathbf{A}$ tali che $p$ è parallelo a $T_k$ e a $S$.

(c) Osserviamo che nelle (a) e (b) abbiamo dimostrato che $S$ è un piano, $T_k$ è una retta e non sono mai paralleli. Dunque se esiste un iperpiano $H$ di $\mathbf{A}$ tale che $H$ contiene $S$ e $T_k$, essendo $H$ uno spazio affine di dimensione 3, si avrebbe che $S \cap T_k \neq \emptyset$. Viceversa se $S \cap T_k \neq \emptyset$ allora preso un punto $R \in S \cap T_k$ è facile vedere che $H = S_{R,<e_1,e_1+e_3,e_2+e_3>}$ è un iperpiano contenente $S$ e $T_k$: infatti, per come è definita la giacitura di $H$, si ha che $H$ è parallelo a $S$ e $T_k$; inoltre $H \cap S \neq \emptyset, H \cap T_k \neq \emptyset$ e quindi, come è noto, $H$ contiene $S$ e $T_k$. Allora resta da verificare per quali $k$ si ha che $S \cap T_k \neq \emptyset$. Le equazioni parametriche di $S$ sono

$$S : \begin{cases} X = 1 + t + s \\ Y = 1 \\ Z = s \\ W = 0 \end{cases} , s, t \in \mathbb{R}$$

e quindi le sue equazioni cartesiane sono

$$S : \begin{cases} Y = 1 \\ W = 0 \end{cases} .$$

Intersecando con $T_k$ si ottiene il sistema

$$S \cap T_k : \begin{cases} X - Y + Z = 1 \\ kX - kW = 2k \\ (k-1)X + Y - Z = 0 \\ Y = 1 \\ W = 0 \end{cases}$$

che si riduce facilmente a

$$\begin{cases} X = 2 \\ Y = 1 \\ Z = 0 \\ W = 0 \\ 2k - 1 = 0 \end{cases}$$

e pertanto $S \cap T_k \neq \emptyset$ se e solo se $k = \frac{1}{2}$. ■

**6.** Siano $V, W, U$ tre spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.
(a) Dimostrare che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $G \circ F$ è suriettiva, allora

$$(*) \quad \mathrm{r}(F) - \dim(\mathrm{Im}(F) \cap N(G)) = \dim U.$$

(b) La condizione $(*)$ è sufficiente per l'esistenza di un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $G \circ F$ è suriettiva?

**SOLUZIONE:**

(a) Se $G \circ F$ è suriettiva, allora, ovviamente $G_{|\mathrm{Im}(F)} : \mathrm{Im}(F) \to U$ è suriettiva. Osserviamo che

$$N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = \mathrm{Im}(F) \cap N(G) :$$

$v \in N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) \iff v \in \mathrm{Im}(F)$ e $G(v) = 0 \iff v \in \mathrm{Im}(F) \cap N(G)$.
Applicando il teorema di rango-nullità a $G_{|\mathrm{Im}(F)}$ si ha che

$$\dim U = \dim \mathrm{Im}(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = \dim \mathrm{Im}(F) - \dim N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = \mathrm{r}(F) - \dim(\mathrm{Im}(F) \cap N(G))$$

quindi vale $(*)$.
(b) Ora supponiamo valga $(*)$ e sia

$$\{w_1, \ldots, w_s\} \text{ una base di } \mathrm{Im}(F) \cap N(G),$$

$$\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_t\} \text{ un completamento ad una base di } \mathrm{Im}(F)$$

e

$$\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_t, w_{t+1}, \ldots, w_n\} \text{ un completamento ad una base di } W.$$

Allora $r(F) = t, \dim(\mathrm{Im}(F) \cap N(G)) = s$ e, per $(*)$, $\dim U = t - s$.
Sia $\{u_1, \ldots, u_{t-s}\}$ una base di $U$ e sia $G : W \to U$ l'unica applicazione lineare tale che

$$G(w_i) = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq s, t+1 \leq i \leq n \text{ e } G(w_i) = u_i \text{ per } s+1 \leq i \leq t.$$

Allora ovviamente $G \circ F$ è suriettiva. Quindi $(*)$ è sufficiente. ■