UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 10-7-2015

TESTO

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 = -1 \\ -kX_1 - kX_2 + (1+k)X_3 - X_4 = 2 + k^2 - k \\ kX_1 - X_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -k \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Determinare la dimensione di U.

(b) Determinare tutti i sottospazi W di $M_2(\mathbb{R})$ tali che

$$U \oplus W = M_2(\mathbb{R}).$$

(c) Siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si determinino (se esistono) tutti i valori di k per i quali $< B_k, C_k > \subseteq U$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e siano

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) Per i valori di k individuati sopra, determinare una matrice R, scritta come prodotto di matrici elementari, tale che $RA = B$.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = E_1, \quad F(E_1 + E_2) = kE_1 + kE_2 - E_3 - E_4,$$

$$F(2E_3) = E_1 + 2kE_3, \quad F(E_3 + E_4) = E_1 + E_2 - 3E_3 - E_4,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - Y + Z = 1 \\ kX - kW = 2k \\ (k-1)X + Y - Z = 0 \end{cases}$$

e sia S il sottospazio passante per il punto $Q = Q(1, 1, 0, 0)$ e di giacitura $W =< e_1, e_1 + e_3 >$.

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S.

(b) Determinare (se esistono) tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è parallelo a T_k e a S.

(c) Determinare per quali valori di k esiste un iperpiano H di $\mathbf{A}$ tale che H contiene S e T_k.

6. Siano V, W, U tre spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Dimostrare che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $G \circ F$ è suriettiva, allora

$$(*) \quad \mathrm{r}(F) - \dim(\mathrm{Im}(F) \cap N(G)) = \dim U.$$

(b) La condizione $(*)$ è sufficiente per l'esistenza di un'applicazione lineare $G : W \to U$ tale che $G \circ F$ è suriettiva?