UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 15-6-2015

TESTO

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 - 2X_2 - kX_3 = 0 \\ kX_1 - X_2 = 2 \\ X_1 + X_2 + 6X_3 = 2 - k \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = < (1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (3 - 2k, -2, 0, 2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \cap W_k$;

(c) Sia $k \neq 0$. Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(1, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 0, 1 - k, -1), v\}$$

non sono generatori di $U + W_k$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & k \\ -1 & -2 & k \end{pmatrix}.$$
(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Si consideri una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in I_3. È possibile che la stessa sequenza trasformi $A^2 + A$ in $A + I_3$?

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = 3(id_U), F(E_3) = E_1 - E_2 + (k+1)E_3 + kE_4, F(E_3 + E_4) = E_1 + (k+2)E_3 + kE_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Si considerino le rette
$$r_k : \begin{cases} X = -1 - t \\ Y = k + t \\ Z = kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} X + 2Y + Z = 1 \\ -X + Y + Z = 1 \end{cases}.$$
(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s sono complanari.
(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ tali che p è incidente a r_k per ogni k e p contiene s.
(c) Determinare per quali valori di k esiste una retta r' di $\mathbf{A}$ tale che r', r_k ed s sono complanari. In tal caso scrivere l'equazione di r'.

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $F : V \to V$ un endomorfismo di V.
(a) Dimostrare che $V/\mathrm{Im}(F) \cong N(F)$;
(b) Supponiamo che F non è iniettivo e che esiste un autovalore λ di F con molteplicità geometrica n. Dimostrare che $\lambda = 0$ e che F è nulla.