UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 17-9-2015

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - 2X_3 - kX_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 + X_4 = 1 \\ kX_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ 2X_1 + 2kX_2 - 6X_3 + (1-2k)X_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = < (1,0,0,1), (0,-1,1,-1), (2,1,-1,-k) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$;

(c) Determinare (se esistono) tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$< (1,0,0,1), v > \subseteq W_k \cap U.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano r la retta passante per $Q(0,0,0,2)$ e parallela a $v_k = e_1 + ke_2$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X + Y + W = 1 \\ X + Y - Z = 0 \\ Z - kW = 1 \end{cases} .$$

(a) Determinare i valori di k per i quali T_k e $r \cap T_k$ sono sottospazi affini di A. Calcolare la dimensione di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, r è parallelo a T_k.

(c) Determinare per quali valori di k esiste una retta s in A che s è parallela ad r e $s \subseteq T_k$.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v = e_2 + e_4, w = e_1 + e_2 + ke_4$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(v) = w,\ F(w) = e_1 + v, F(e_3 + e_4) = e_1 - e_2, F(e_2) = e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.