UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prova scritta del 26-1-2016

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Determinare per quali valori $k \in\mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - kX_3 + 3X_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 = 2 \\ (2-2k)X_1 - 2X_2 - kX_3 + 5X_4 = k \\ kX_1 + X_2 + X_4 = 1 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, calcolarne esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -k & 3 \\ k & -1 & -k & 0 \\ 2-2k & -2 & -k & 5 \\ k & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 0$ mentre

$$\begin{vmatrix} -1 & -k & 3 \\ -1 & -k & 0 \\ -2 & -k & 5 \end{vmatrix} = -3k$$

quindi $r(A) = 3$ se $k \neq 0$. Se $k = 0$ abbiamo il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

pertanto $r(A) = 3$ anche per $k = 0$, quindi per ogni k. Ora calcoliamo il rango di

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -k & 3 & 0 \\ k & -1 & -k & 0 & 2 \\ 2-2k & -2 & -k & 5 & k \\ k & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ basta orlare la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -k & 3 \\ -1 & -k & 0 \\ -2 & -k & 5 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene o $\det A = 0$ oppure

$$\begin{vmatrix} -1 & -k & 3 & 0 \\ -1 & -k & 0 & 2 \\ -2 & -k & 5 & k \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3k(k+3)$$

da cui deduciamo che

$$r(A\ b) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, -3 \\ 3 & \text{se } k = -3 \end{cases}.$$

Se $k = 0$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

da cui deduciamo che $r(A\ b) = 4$ se $k = 0$.

Quindi

$$r(A\ b) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq -3 \\ 3 & \text{se } k = -3 \end{cases}.$$

Ne segue che $r(A) = r(A\ b)$ se e solo se $k = -3$. Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k = -3$ e possiamo calcolare la soluzione con la regola di Cramer.

Usiamo il minore

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 9.$$

Posto $X_1 = t$ si ha

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -t & 3 & 3 \\ 2+3t & 3 & 0 \\ -3-8t & 3 & 5 \end{vmatrix}}{9} = \frac{13t+5}{3}, \quad X_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -t & 3 \\ -1 & 2+3t & 0 \\ -2 & -3-8t & 5 \end{vmatrix}}{9} = \frac{11(2t+1)}{9},$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -t \\ -1 & 3 & 2+3t \\ -2 & 3 & -3-8t \end{vmatrix}}{9} = -\frac{2(2t+1)}{3}. \quad \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$U_k =< (0,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-k,0,1) >$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -X_1 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$;

(c) Determinare (se esistono) tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,1-k,-1),v\}$$

non sono generatori di $W_k + U_k$.

SOLUZIONE:

(a) La dimensione di U_k è data dal rango della matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è lo stesso della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix} = k$$

pertanto $\dim U_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(0,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-k,0,1)\} \text{ se } k \neq 0$$

e

$$\{(0,0,0,1),(0,1,1,0)\} \text{ se } k = 0.$$

La dimensione di W_k ed una sua base si ottiengono risolvendo il sistema. Posto $X_2 = s, X_3 = t$ si trova $X_1 = -t, X_4 = (k+1)t$ pertanto un vettore di W_k è del tipo

$$(-t, s, t, (k+1)t) = t(-1,0,1,k+1) + s(0,1,0,0)$$

quindi $\dim W_k = 2$ per ogni k ed una sua base è

$$\{(-1,0,1,k+1),(0,1,0,0)\}.$$

(b) La dimensione di $W_k + U_k$ è il rango della matrice dei suoi generatori

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

deduciamo che $\dim(W_k + U_k) = 4$ per ogni k. Ora la formula di Grassmann da

$$\dim(W_k \cap U_k) = \dim(W_k) + \dim(U_k) - \dim(U + W_k) = 2 + \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} - 4 = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

(c) Dalla (b) sappiamo che $\dim(W_k + U_k) = 4$ per ogni k, perciò $W_k + U_k = \mathbb{R}^4$. Quindi un vettore $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ è tale che $\{(0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,1-k,-1),v\}$ non sono generatori di $\mathbb{R}^4$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

ovvero, calcolando il determinante, se e solo se

$$(1-k)a + b - c = 0. \quad \blacksquare$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y = 2 \\ X + Y - W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X - Y - Z = 1 \\ Y - W = 0 \\ X + (2-k)Y + kZ = -1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Determinare per quali k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo dalla teoria che, affinchè S e T_k siano sottospazi, è necessario e sufficiente che siano non vuoti.

Risolviamo il sistema che definisce S. Posto $Y = s, Z = t$ si ottiene

$$S : \begin{cases} X = 2 + s \\ Y = s \\ Z = t \\ W = 2 + 2s \end{cases}$$

pertanto S è il sottospazio passante per il punto $Q(2, 0, 0, 2)$ e di giacitura

$$\text{giac}(S) =< e_1 + e_2 + 2e_4, e_3 >$$

quindi $\dim S = 2$.

Per T_k osserviamo invece che la matrice dei coefficienti del sistema che lo definisce

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-k & k & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 per ogni k dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-k & k \end{vmatrix} = k + 1 = 0$$

solo se $k = -1$ mentre, per $k = -1$, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ per ogni k ed è quindi un sottospazio per ogni k. Inoltre

$$\dim T_k = \dim A - r(B_k) = 4 - 3 = 1.$$

(b) Dato che T_k è una retta, verifichiamo se la sua giacitura è contenuta in quella di S. La giacitura di T_k è data dal sistema omogeneo $B_k U = 0$, dove $U =^t (X, Y, Z, W)$. Per calcolarne le soluzioni facciamo operazioni elementari sulla matrice B_k.

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-k & k+1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + (k-3)R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 3-k \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq -1$ si vede che le soluzioni del sistema omogeneo $B_k U = 0$ sono

$$W = t, Z = \frac{k-3}{k+1}t, Y = t, X = \frac{2k-2}{k+1}t$$

da cui, moltiplicando per $k+1$,

$$\mathrm{giac}(T_k) = <(2k-2)e_1 + (k+1)e_2 + (k-3)e_3 + (k+1)e_4> .$$

Se $k = -1$ si vede che le soluzioni del sistema omogeneo $B_{-1}U = 0$ sono

$$W = 0, Z = t, Y = 0, X = t$$

da cui

$$\mathrm{giac}(T_{-1}) = <e_1 + e_3> .$$

Ora consideriamo la matrice dei vettori delle due giaciture di S e T_k.
Se $k \neq -1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2k-2 & k+1 & k-3 & k+1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ k+1 & k-3 & k+1 \end{vmatrix} = -k-1 \neq 0$$

mentre, se $k = -1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Quindi, in entrambi i casi, giac$(T_k) \not\subseteq$ giac(S) e quindi non esistono valori di k tali che S e T_k sono paralleli.

(c) Se esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$ allora, essendo T_k una retta, si ha $r = T_k$ e quindi che $T_k \subseteq S$. Ma allora sarebbe, in particolare, T_k parallelo ad S, cosa che sappiamo non essere possibile. Dunque per nessun k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $U =< (-1, 1, 0, 0) >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$E_1 \in N(F), F_{|U} = id_U, F(E_3 - E_2) = E_1 - E_2 + kE_4, F(E_3 + E_4) = E_1 + kE_3$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{E_1, -E_1 + E_2, E_3 - E_2, E_3 + E_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo le trasformate di F. Per ipotesi sappiamo che

$$F(E_1) = 0, \quad F(-E_1 + E_2) = -E_1 + E_2.$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo $F(E_3 - E_2) = E_1 - E_2 + kE_4$ e $F(E_3 + E_4) = E_1 + kE_3$ nella base e. Si ha

$$aE_1+b(-E_1+E_2)+c(E_3-E_2)+d(E_3+E_4) = (a-b)E_1+(b-c)E_2+(c+d)E_3+dE_4 = E_1-E_2+kE_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ b - c = -1 \\ c + d = 0 \\ d = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -k, b = -1 - k, c = -k, d = k$. Pertanto

$$F(E_3 - E_2) = -kE_1 + (-1 - k)(-E_1 + E_2) - k(E_3 - E_2) + kE_4.$$

Analogamente

$$aE_1+b(-E_1+E_2)+c(E_3-E_2)+d(E_3+E_4) = (a-b)E_1+(b-c)E_2+(c+d)E_3+dE_4 = E_1+kE_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ b - c = 0 \\ c + d = k \\ d = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1 + k, b = k, c = k, d = 0$. Pertanto

$$F(E_3 + E_4) = (1 + k)E_1 + k(-E_1 + E_2) + k(E_3 - E_2).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k & 1+k \\ 0 & 1 & -1-k & k \\ 0 & 0 & -k & k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & -k & 1+k \\ 0 & 1-T & -1-k & k \\ 0 & 0 & -k-T & k \\ 0 & 0 & k & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(T^2+kT-k^2) = T(T-1)(T^2+kT-k^2).$$

Le radici di $T(T - 1)(T^2 + kT - k^2) = 0$ sono

$$0, 1 \text{ e } \frac{k}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Osserviamo che $0 = \frac{k}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ se e solo se $k = 0$, mentre $1 = \frac{k}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ se e solo se $k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq 0, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{k}{2}(-1 - \sqrt{5})$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{k}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)
$k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_3 = -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = 0$ posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 0I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, da cui $\dim V_0(F) = 4 - 2 = 2$.
Sia ora $k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e prendiamo $\lambda_2 = 1$ come autovalore da considerare.
Calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X =^t (x, y, z, w)$. Si ottiene, tenendo conto del fatto che $k^2 - k - 1 = 0$,

$$\begin{cases} -x - kz + (1 + k)w = 0 \\ (-1 - k)z + kw = 0 \\ kz - w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = s, z = t, w = kt, x = k^2t$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo

$$k^2tE_1+s(-E_1+E_2)+t(E_3-E_2)+kt(E_3+E_4) = t(k^2E_1+E_3-E_2+k(E_3+E_4)+s(-E_1+E_2)$$

e una base di $V_1(F)$ è $\{k^2E_1 + E_3 - E_2 + k(E_3 + E_4), -E_1 + E_2\}$ per $k = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq 0, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	1	1
$\frac{k}{2}(-1-\sqrt{5})$	1	1
$\frac{k}{2}(-1+\sqrt{5})$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.
2) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	3
1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.
3) $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	2	2
$-\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.
Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 0$. $\blacksquare$