UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Prima prova di esonero

TESTO

1. Si determini, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 - X_3 + 3X_4 = 0 \\ 2X_1 - kX_3 + 2X_4 = k + 4 \\ kX_1 + X_2 + X_4 = -k \\ X_1 + X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, se ne calcolino esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k per i quali esiste una matrice $C \in M_3$ tale che $C\,{}^tA = B$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di C.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 + X_3 = 0 \\ kX_1 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + kX_2 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Si determini se esistono valori di $k \neq 0$ per i quali

$$(W_k + U_k) \oplus (W_k \cap U_k) = \mathbb{R}^4;$$

(c) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.