UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2014-2015

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 - e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che

$$v \in N(F), F(e_1 + e_2) = (k^2 - k)v, F(e_2) = 4e_1 - ke_4, F(e_2 + e_4) = -e_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + W = 2 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X - Y - Z = 2 \\ Y + W = 0 \\ kX + (2-k)Y + Z + 2W = -1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Determinare per quali k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$.

3. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita, sia U un sottospazio di V, sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $F_{|U} : U \to W$ la restrizione di F ad U.

(a) Dimostrare che $F_{|U}$ è un isomorfismo se e solo se $\dim U = \dim W$ e $U \cap N(F) = \{0\}$.

(b) Sia T un sottospazio di W. Dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un'applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F_{|U} : U \to T$ è suriettiva.