Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 12
19 Maggio 2015

1. In R^3 si considerino le basi: $B_1 = \{(1;1;1);(0;2;3);(1;0;3)\}$; $B_2 = \{(4;3;1);(0;1;2);(1;0;1)\}$.
Determinare la matrice P del cambiamento di base da B_1 a B_2.
Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_2 a B_1.
SOLUZIONE:
$B_1 = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,3)\}$
$B_2 = \{(4,3,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$
Per calcolare la matrice del cambiamenti di base P utilizzo la formula del cambiamento di base:
$P = M_{B_2,B_1}(\mathbb{I}) = M_{B_2,e}(\mathbb{I})M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_2}(\mathbb{I}))^{-1}M_{e,B_1}(\mathbb{I}) \Rightarrow$
$M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, da cui ricavo l'inversa:
$M_{B_2,e}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_2}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$;
$M_{e,B_1}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Ora mi basta sostituire nella formula precedente per ottenere la matrice P:
$P = M_{B_2,B_1}(\mathbb{I}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 15 & 6 \\ 1 & -4 & 17 \end{pmatrix}$.
Per determinare Q si puó sia ragionare in maniera del tutto analoga, sia utilizzare il fatto che:
$Q = M_{B_1,B_2}(\mathbb{I}) = (M_{B_2,B_1}((I)))^{-1}$
N.B. La relazione precedente vale solo per le matrici di cambiamento di base in quanto la f.ne a cui sono associate é l'identitá.
In questo caso conviene procedere come prima in quanto mi manca solo da calcolare una matrice, mentre P ha componenti abbastanza grandi e trovare l'inversa é contoso. $M_{B_1,e}(\mathbb{I}) = (M_{e,B_1}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$Q = M_{B_1,B_2}(\mathbb{I}) = M_{B_1,e}(\mathbb{I})M_{e,B_2}(\mathbb{I}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 31 & -1 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Sia P^3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado minore di 3 a coefficienti reali e $F : P^3 \to P^3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = nX^{n-1}$ (derivata formale). Calcolare nucleo e immagine di F e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e é la base $\{1; X; X^2; X^3\}$ e b é la base $\{1; 1+X; 1+X+X^2; 1+X+X^2+X^3\}$.
SOLUZIONE:
L'applicazione é definita come $F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$, quindi affinché $F(p(x)) = 0$ dobbiamo imporre $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow$ Il nucleo é costituito dai polinomi costanti, cioé $Ker(F) = \mathbb{R}$; per l'immagine, notiamo che al variare di a_1, a_2, a_3 si trovano tutti e soli i polinomi di grado due, quindi $Im(F) = P_2$. La matrice rispetto alla base canonica,$1, x, x^2, x^3$ si calcola facilmente ed é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice rispetto alla base b si puó usare la formula del cambiamento di base $\mathbf{M}_b(F) = (\mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_e(F)\mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}) \Rightarrow$
$$\mathbf{M}_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, é associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:
SOLUZIONE:
$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo che f non é suriettiva se il rango di C non é massimo $\Leftrightarrow$ $Det(C) = 0$.
Poiché $Det(C) = 3h - 6 \Rightarrow Det(C) = 0 \Leftrightarrow h = 2$.
A questo punto sostituiamo il valore di h trovato nella matrice C.

- determinare $Im(f)$;
  SOLUZIONE:
  $dim(Im(f)) = r(C) = 2$ in quanto esiste un minore di ordine due non nullo $\Rightarrow$ l'immagine é generata da due vettori linearmente indipendenti che vi appartengano, in quanto la dimensione del sottospazio é 2 (va bene qualsiasi coppia di vettori che soddisfano questi due requisiti)$\Rightarrow$ $Im(f) =< (2, 1, -1), (1, 2, 1) >$.

- determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
  SOLUZIONE:
  Il vettore $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$ se puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori che ne costituiscono la base, ossia se é

linearmente dipendente da questi, ossia se: $det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k^2-k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$. Per tali valori di k il vettore appartiene a $Im(f)$.

- trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
  SOLUZIONE:
  Basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartiene a $Im(f)$. Sfrutto il punto precedente e sostituisco al vettore un valore di $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$, sia $k = 1 \rightarrow$ il vettore $(1,0,1)$ non appartiene all'immagine.

- determinare $Ker(f)$;
  SOLUZIONE:
  $dim(Ker(f)) = 1$ per il teorema di nullitá piú rango. Per trovare il vettore che mi genera il nucleo basta risolvere il sistema omogeneo $Cx = 0$ che ha soluzioni $(z,-z,z), z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) =< (1,-1,1) >$.

- verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
  SOLUZIONE:
  $Ker(f) \cup Im(f) = x$,i vettori della base dell'immagine e i vettori della base del nucleo sono linearmente dipendenti tra loro (vedi formula Grassmann vettoriale). In questo caso basta verificare che la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ abbia rango massimo, ossia $|A| \neq 0$.

- esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3,2,-2)$?
  SOLUZIONE:
  Per farlo dobbiamo mostrate che $(3,2,2) \in Im(f)$, ció accade se e solo se il vettore puó essere scritto come combinazione lineare della base, e quindi é linearmente dipendente da questi. Dunque considero la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dove i primi due vettori colonna sono i vettori della base di $Im(f)$, mentre l'ultimo é il vettore che devo controllare appartenga all'immagine. Quindi se calcolo $det(B)$ si presentano due casi:
  - se $det(B) = 0$ il vettore é linearmente dipendente dai vettori che costituiscono la base di $Im(f)$ e quindi vi appartiene;
  - se $det(B) \neq 0$ il vettore é linearmente indipendente dai vettori della base di $Im(f)$, quindi non puó essere scritto come loro combinazione lineare (non appartiene all'immagine). In questo caso $det(B) = 7$.

- trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1,2,-1)$.
  SOLUZIONE:
  Devo determinare quali sono i vettori $v = (x,y,z)$ t.c. $f(v) =$

$(1,2,-1)$. Basterá risolvere il sistema lineare $Cv = (1,2,-1)$ in quanto le soluzioni di questo sistema individuano tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ che hanno come immagine tramite f proprio il vettore $(1,2,-1)$. In questo caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(2+t, 1-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. In R^3 si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

(a) f é iniettivo? f é suriettivo?
(b) Trovare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
(c) Determinare $\{t \in R | v = (t+1; 2t; -1) \in Im(f)\}$.
(d) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$.
(e) Trovare un vettore x che non appartenga all'immagine.
(f) $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta?
(g) Determinare le controimmagini del vettore $u = (3; 4; -1)$.
SOLUZIONE:
Risolvendo il sistema proposto nelle variabili $f(i)$,$f(j)$,$f(k)$ otteniamo le componenti dei vettori immagine della base $b = \{i, j, k\}$ risp. la stessa base e possiamo quindi scrivere la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f associata a $b \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(i) = 6i + j + k \\ f(j) = 9i + 3k \\ f(k) = -3i + j - 2k \end{cases}$$

da cui costruiamo la matrice:

$$A = \mathbf{M}_b(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) f é suriettiva $\Leftrightarrow dim(Im(f)) = 3 = r(A)$. Tuttavia $Det(A) = 0 \Rightarrow$ Il rango di A non é massimo, in particolare $r(A) \neq 3 \Rightarrow f$ non é suriettiva. Inoltre $dim(Im(f)) = 2$ (in quanto esiste un minore di ordine due non nullo di A),quindi $dim(Ker(f)) = 1$, da cui f non é iniettiva.
(b) Per costruire una base di $Im(f)$ basta prendere due vettori che siano lin.ind. e che appartengano all'immagine. Scelgo $f(i) = f(1,0,0) = (6,1,1)$ e $f(j) = f(0,1,0) = (9,0,3)$, quindi $Im(f) =< (6,1,1), (0,1,0) >$. I vettori appartenenti al nucleo di f corrispondono alle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$, con $\underline{x} = (x, y, z)$ vettore generico. In questo caso le soluzioni sono generate dal vettore $(-z, z, z)$,$z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) =< (-1,1,1) >$.
(c) $\underline{v} = (t+1, 2t, -1) \in Im(f) \Leftrightarrow$ puó essere scritto come comb.lin. dei vettori che compongono la base di $Im(f)$, quindi se é lin. dip. dai due, quindi se:

$$Det \begin{pmatrix} t+1 & 6 & 9 \\ 2t & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0, \text{ cosa che avviene } \Leftrightarrow t = \tfrac{4}{5}.$$

(d) Sostituendo il valore di t trovato nel punto precedente troviamo il vettore $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1)$. Per calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$.
mi basta trovare a,$b \in \mathbb{R}$ t.c. $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1) = a(6,1,1) + b(9,0,3)$, da cui otteniamo il sistema: $\begin{cases} \frac{9}{5} = 6a + 9b \\ \frac{8}{5} = a \\ -1 = a + 3b \end{cases}$; risolvendolo si ricava $a = \frac{8}{5}$ e $b = -\frac{13}{15}$.
(e) Basta sfruttare quanto fatto in precedenza e prendere un valore di t per cui $\underline{v} \notin Im(f) \Rightarrow$ Scelgo $t = 0$; ne segue che il vettore $\underline{x} = (1,0,-1) \notin Im(f)$.
(f) $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta $\Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow$ I vettori della base dell'immagine e quelli della base del kernel sono lin.ind.
$\Leftrightarrow Det \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Quest'ultima condizione é in effetti verificata e la somma tra i due sottospazi vettoriali é diretta.
(g) Per vedere quali sono i vettori $\underline{u}$ t.c. $f(\underline{u}) = (3,4,-1)$ noto che essi corrispondono all'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = (3,4,-1)$, il quale peró é incompatibile, non ammette soluzioni. Ció implica che il vettore $(3,4,-1) \notin Im(f)$.

5. Siano $v = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$ e $w = \{(1;0;1;1);(1;1;1;0);(0;0;1;1);(1;0;1;1)\}$ due basi rispettivamente di R^3 e R^4 e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : R^3 \to R^3 : F(x;y;z) = (x+z; x+2y; 2x+3y+z)$;
$G : R3 \to R^4 : G(x;y;z) = (x+z; x+y+z; x+y+2z; 2x+y+2z)$;
$H : R^4 \to R^3 : H(x;y;z;t) = (x+2z+t; x-y-z+t; y-t)$;
$I : R^4 \to R^4 : I(x;y;z;t) = (x+z+t; 2x+y+t; x-y-2z+t; y-z+t)$.
Determinare le matrici associate a tali applicazioni: $M_v(F); M_{w;v}(G); M_{v;w}(H)$ e $M_w(I)$. **SOLUZIONE**:

- La matrice associata a F rispetto la base canonica é la matrice che ha per colonne i vettori immagine della base canonica, in quanto le componenti di un qualsiasi vettore corrispondono alle sue coordinate rispetto alla base canonica.
$F(1,0,0) = (1,1,2)$;
$F(0,1,0) = (0,2,3)$;
$F(0,0,1) = (1,0,1)$.
$\mathbf{M}_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- Analogamente a prima determino i vettori immagine della base v e poi li esprimo in coordinate rispetto la base w.
$G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+y+2z, 2x+y+2z)$
$G(v_1) = (1,1,1,2) = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2 + \frac{2}{3}w_3 + \frac{2}{3}$;
$G(v_2) = (0,1,1,1) = w_3$;

$G(v_3) = (1,1,2,2) = w_1 + w_3$.
$\Rightarrow \mathbf{M}_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Se la base d'arrivo é la base canonica metto direttamente i vettori immagine in colonna in quanto le componenti di un vettore sono le sue coordinate in base canonica.
$H(x,y,z,t) = (x+2z+t, x-y-z+t, y-t)$
$H(w_1) = (4,1,-1)$;
$H(w_2) = (3,-1,1)$;
$H(w_3) = (3,-1,0)$;
$H(w_4) = (2,1,0)$.
$\Rightarrow \mathbf{M}_{v,w}(H) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Per calcolare $\mathbf{M}_w(I)$, dove $I(x,y,z,t) = (x+z+t, 2x+y+t, x-y-2z+t, y-z+t)$, applico la seguente:
FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE:
Siano V e W due $K-$spazi vettoriali di dimensione risp. n e m; sia $f : V \to W$ applicazione lineare; siano $v = v_1, \dots, v_n$ una base di V e $w = w_1, \dots, w_m$ una base di W; siano e e E basi canoniche risp di V e $W \Rightarrow$

$$\mathbf{M}_{w,v}(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_{E,e}(f)\mathbf{M}_{e,v}(\mathbb{I})$$

In questo caso $\Rightarrow$

$$\mathbf{M}_w(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_E(I)\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$$

Vado quindi a calcolarmi le due matrici che mi interessano:
$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$ é la matrice associata alla f.ne identitá che ha come base d'arrivo la base canonica in $\mathbb{R}^4$, quindi per ottenerla basterà mettere in colonna le componenti dei vettori della base $w \Rightarrow$:
$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mentre la sua inversa é la matrice :
$(\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{M}_w(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ora basta sostituire nella formula e moltiplicare le matrici!!!