Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

SOLUZIONE TUTORATO 3
3 MARZO 2015

1. Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base.
Nel caso siano indipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.
Se possibile si trovi una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$

   - $v_1 = (1,3,2),\ v_2 = (2,1,-1),\ v_3 = (1,2,-2)$
   - $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,6),\ v_3 = (2,3,0)$
   - $v_1 = (4,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (4,0,5),\ v_4 = (1,1,0)$
   - $v_1 = (3,-5,2),\ v_2 = (1,3,-1)$

   Soluzione:

   - Verifichiamo l'indipendenza lineare dei vettori: cerchiamo una combinazione lineare del tipo $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (0,0,0)$.
   $\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 3a+b+2c=0 \\ 2a-b-2c=0 \end{cases}$ poiché l'unica soluzione di questo sistema é $(0,0,0)$, si ha che l'unica combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Essendo 3 vettori indipendenti, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.Per trovare una combinazione lineare che dia come risultato $a(1,3,2)+b(2,1,-1)+c(1,2,-2) = (1,1,1)$, consideriamo il sistema
   $\begin{cases} a+2b+c=1 \\ 3a+b+2c=1 \\ 2a-b-2c=1 \end{cases}$
   L'unica soluzione é $(\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{3})$, quindi $(1,1,1) = \frac{2}{5}v_1 + \frac{7}{15}v_2 - \frac{1}{3}v_3$.

   - Sono linearmente dipendenti e quindi, essendo 3, non generano $\mathbb{R}^3$. Si ha $v_2 = 2(v_3 - v_1)$, ovviamente $(1,1,1) \in < v_1, v_2, v_3 >$.

   - Sono più di 3 vettori, quindi sono linearmente dipendenti; per verificare se generano $\mathbb{R}^3$, proviamo a scrivere un generico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $(x,y,z) = a(4,2,1)+b(2,1,1)+c(4,0,5)+d(1,1,0)$, ovvero:
   $\begin{cases} 4a+2b+4c+d=x \\ 2a+b+d=y \\ a+b+5c=z \end{cases}$ poiché questo sistema ha soluzioni per qual-

siasi valore di (x, y, z) (che considereremo parametri nella soluzione del sistema), abbiamo che ogni vettore puó essere scritto come combinazione lineare dei nostri 4 vettori, che quindi sono un sistema di generatori. Si ha inoltre che $v_3 = 6v_2 - v_1 - 4v_4$, inoltre $(1, 1, 1) = -v_1 + 2v_2 + v_4$.

- Sono meno di 3 vettori, quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$, ma sono linearmente indipendenti.

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.
Soluzione:
Interpretiamo le matrici come vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $M \approx (m_11, m_12, m_21, m_22)$ ed utilizziamo il sistema per verificare l'indipendenza delle quattro matrici.
Poi imponendo il sistema che ha per colonne le matrici della base portate a vettori e orlandolo con la matrice E portata a vettore (coerentemente con il modello soprascritto) e la soluzione di questo sistema è la combinazione lineare di $\{A, B, C, D\}$ che dà E.
Le soluzioni sono: $\begin{cases} a = -\frac{11}{21} \\ b = -\frac{13}{7} \\ c = -\frac{8}{21} \\ d = \frac{17}{21} \end{cases}$

3. Si mostri che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:
a)$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \text{ tc } a, b \in \mathbb{Q}\}$, campo dei razionali gaussiani.
b)$\mathbb{R}$, il campo dei reali.
Inoltre mostrare che $\mathbb{Q}(i)$ ha una base con due elementi e $\mathbb{R}$ (come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$) non ha una base finita.
Soluzione:
Innanzitutto notiamo che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{R}$ sono due campi contenenti $\mathbb{Q}$ e quindi sono entrambi dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali. Una prova di ció puó essere data dal seguente enunciato:
Sia H un campo e K un suo sottocampo. Allora H é uno spazio vettoriale su K con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.
Dimostrazione. Le prime quattro proprietá degli spazi vettoriali valgono perché, essendo H un campo, sará necessariamente un gruppo abeliano rispetto all'addizione. $SV5$ e $SV6$ derivano direttamente dalla proprietá distributiva rispetto alle operazioni definite sul campo, la $SV7$ dall'associatività del prodotto sul campo e la $SV8$ dal fatto che l'unitá moltiplicativa di K é la stessa di H. □
Cerchiamo ora le basi:

(a) L'insieme $\{1, i\}$ é una base di $\mathbb{Q}(i)$ (si verifica immediatamente sia che generano lo spazio sia che sono indipendenti). Quindi la base di $\mathbb{Q}(i)$ ha 2 elementi.

(b) Per assurdo supponiamo di avere una base finita $\{, v_1, v_2, ..., v_n\}$ e consideriamo gli elementi $\pi, \pi^2, ..., \pi^n, \pi^{n+1}$; per il teorema 4.12 del Sernesi, tali elementi dovrebbero essere linearmente dipendenti su $\mathbb{Q}$, ma cosí non é poiché π é trascendente. Quindi $\mathbb{R}$ non ha una base finita su $\mathbb{Q}$.

4. Si determinino le coordinate dei vettori di
$v_1 = (3, 2, -5),\ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}),\ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
rispetto alle seguenti basi:

- (a) La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
- (b) La base $B = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$

Soluzione:
(a)

- $v_1 = (3, 2, -5) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = -5.$
- $v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2})$ come per v_1 le coordinate rispetto alla base canonica sono $a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{1}{2}$.
- lo stesso per v_3, $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$.

(b)

- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi risolvendo il seguente sistema:
$\begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2c = 2 \\ 2a + b + c = -5 \end{cases}$ avremo che le coordinate rispetto alla base B sono: $a = -18,\ b = 21,\ c = 10$.
- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 le coordinate rispetto a B sono: $a = -3,\ b = 4,\ c = \frac{3}{2}$.
- $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, procedendo come per v_1 e v_2 le coordinate rispetto a B sono: $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{1}{3}$.

5. Dati i seguenti vettori:
$a := (1; 3; 2)$
$b := (-2; k - 6; k + 4)$
$c := (-1; k - 3; k^2 + k + 1)$
$d := (0; -2; k - 1)$

- Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a, b, c\}$ sono linearmente indipendenti.

- Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a, b, c\}$.

Soluzione:

- Imposto il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori dati e lo riduco a gradini in funzione di k e trovo che per $k = 0, \pm\sqrt{5}$ mi si annulla una riga, quindi per tutti e soli quei valori i vettori sono linearmente dipendenti.
- Dopo aver sostituito a k il valore 2 (per cui i tre vettori a,b,c sono linearmente indipendenti), imposto il sistema come prima ma lo orlo con il quarto vettore. In questo modo le soluzioni sono i coefficienti della combinazione lineare di a,b,c (siano x_1,x_2 e x_3) che mi danno d. Le soluzioni sono: $x_1 = 9$; $x_2 = 10$; $x_3 = -11$.

6. Si risolva, se é compatibile, il seguente sistema di equazioni:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$
Soluzione:

la matrice del sistema é: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tramite operazioni elementari sulle righe o sulle colonne riduco la mia matrice a gradini; la matrice diventerá:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, si puó subito notare che il sistema é a gradini e che le soluzioni sono dipendenti da un parametro (mettendo ad esempio x_1 come parametro) e quindi il sistema avrá ∞^1 soluzioni.

7. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
$a := (1, 1, 0)$, $b := (0, 1, -1)$, $d := (2, 3, -1)$.
Considerata l'equazione vettoriale:
$x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$
determinare, se possibile, un vettore $c := (x, y, z)$ nei seguenti casi:

- L'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
- L'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;

- L'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni;
- quand' é possibile determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

Soluzione:

8. Si dica se l'insieme delle coppie reali (complesse) (x, y) soddisfacenti alla relazione $x^2 + y^2 = 0$ é un sottospazio vettoriale di R^2 ($\mathbb{C}^2$).
Soluzione:
Nel caso di $\mathbb{R}^2$ é lo spazio vettoriale banale in quanto l'unica coppia che soddisfa l'equazione é $(0, 0)$.
Nel caso di $\mathbb{C}^2$ non lo é. Infatti basta prendere in esame le due coppie $(i, 1)$ e $(1, i)$.
Sebbene risolvano $x^2 + y^2 = 0$, la loro somma non soddisfa tale relazione. Nei complessi non é dunque uno spazio vettoriale in quanto non chiuso rispetto l'operazione di somma.

9. Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n (reali o complesse):

   (a) Matrici antisimmetriche;
   (b) Matrici triangolari superiori;
   (c) Matrici invertibili;
   (d) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 0;
   (e) Matrici con elemento $(1, 1)$ uguale a 1 (matrice nulla compresa).

   Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n.
   Soluzione:
   Tutti gli insiemi considerati sono sottoinsiemi di M_n. Per verificare se sono anche sottospazi, occorre verificare per ciascuno di essi le tre condizioni:

   - Il vettore nullo (in questo caso la matrice nulla) appartiene all'insieme;
   - Chiusura rispetto alla somma, cioé la somma di due elementi qualsiasi deve appartenere all'insieme stesso;
   - Chiusura rispetto al prodotto per scalari

   (a) L'insieme delle matrici antisimmetriche é uno spazio vettoriale. Infatti la matrice nulla é antisimmetrica. Se ${}^tA = -A, {}^tB = -B \Rightarrow {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = -(A+B)$ da cui la chiusura rispetto la somma. In modo analogo si dimostra la chiusura rispetto la moltiplicazione per scalare.
   (b) L'insieme delle matrici triangolari superiori é uno spazio vettoriale.
   (c) L'insieme delle matrici invertibili non é uno spazio vettoriale: é sufficiente osservare che la matrice nulla non é invertibile.
   (d) L'insieme delle matrici con l'elemento $(1, 1)$ uguale a 0 é uno spazio vettoriale. Infatti per la matrice nulla l'elemento $(1, 1)$ vale 0, la somma di due matrici in cui l'elemento $(1, 1)$ vale 0 é una matrice in cui l'elemento $(1, 1)$ vale 0 e analogamente l'insieme é chiuso per prodotti con scalari.

(e) L'insieme delle matrici con l'elemento $(1,1)$ uguale 1 non é uno spazio vettoriale: basta osservare che sommando due matrici del genere si ottiene una matrice in cui l'elemento $(1,1)$ vale 2.