Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

SOLUZIONE TUTORATO 6
31 MARZO 2015

1. Sia k un numero reale e si considerino le seguenti coppie di matrici:
$A_1 = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Si determino i valori di k per i quali A_i puó essere trasformata in B_i con sole operazioni elementari.

   (b) Per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di trasformazioni elementari che trasformi A_i in B_i.

   Soluzione: Matrice $A_1 \to$ Primo esonero A.A. $2005-2006$,

   Matrice $A_2 \to$ Primo esonero A.A. $2004-2005$,

   Matrice $A_3 \to$ Primo esonero A.A. $2002-2003$.

2. Sia a un numero reale e si consideri la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$
Si determinino i valori di a per i quali A puó essere scritto come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

   Soluzione: Primo appello A.A. $2005-2006$

3. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:
$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$
e $W_h =< (1;0;1;0);(-1;1;0;-1);(h;-1;2;1) >$:

   (a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi;

   (b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

   (c) Determinare se esiste un sottospazio $V \neq \{0\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che: $(W_h + U) \oplus V = \mathbb{R}^4$.

   Soluzione: Primo appello A.A. $2011-2012$

4. Siano k un numero reale, $v_k = (k, k, 0) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$
e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale $U_k =< (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, k) >$.
(a) Si determinino due basi di $(W+ < v_k >)$ e U_k;
(b) Si determinino le dimensioni di $U_k + (W + v_k)$ e di $U_k \cap (W + v_k)$;
(c) Si determinino , se esistono, i valori di k per cui $U_k \oplus W = \mathbb{R}^3$.
Soluzione: Primo esonero A.A. $2005 - 2006$.

5. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$
e $W_h =< (1; 1; 1; 1); (0; 1; 0; -1); (2; 3; 2; h) >$:
(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi;
(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;
(c) Determinare se esistono valori di h per cui $W_h \oplus U = \mathbb{R}^4$.
Soluzione: Primo esonero A.A. $2004 - 2005$.

6. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Siano:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$
(a) Sia $U :=< A_1, A_2, A_3, A_4 >$. Si calcoli la dimensione di U;
(b) Si determini un sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$;
(c) Sia k un numero reale e siano $B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Si determino, se esistono, i valori di k per i quali $Dim(U \cap < B_k, C_k >) = 1$.
Soluzione: Primo esonero A.A. $2001 - 2002$

7. Al variare dei parametri si considerino i seguenti sistemi:
$$\begin{cases} kx_1 + hx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + kx_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + kx_2 + hx_3 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ kx_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 + x_4 = 0 \\ hx_1 + hx_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 - hx_4 = 0 \\ hx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori dei parametri per i quali i sistemi sono o meno compatibili e, in tal caso si calcolino esplicitamente le soluzioni.

Soluzione:

Primo sistema $\rightarrow$ Primo esonero A.A. $2011-2012$,

Secondo sistema $\rightarrow$ Primo appello A.A. $2011-2012$,

Terzo sistema $\rightarrow$ Primo esonero A.A. $2005-2006$,

Quarto sistema $\rightarrow$ Primo appello A.A. $2005-2006$.

8. Siano a e b due numeri reali e consideriamo le seguenti matrici:

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} b & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Per ognuna di esse si determinino i parametri per i quali sono o meno invertibili e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

Soluzione:

Matrice A $\rightarrow$ Secondo appello A.A. $2011-2012$,

Matrice B $\rightarrow$ Primo esonero A.A. $2011-2012$,

Matrice C $\rightarrow$ Primo esonero A.A. $2001-2002$,

Matrice D $\rightarrow$ Secondo appello A.A. $2001-2002$,