Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 7
14 Aprile 2015

1. Verificare con un esempio che $Det(A+B) \neq Det(A) + Det(B)$.

   Soluzione:
   Un semplice esempio: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$.

2. Si dimostri che $det(M) = \pm 1$, con $M \in O_n(K)$ (gruppo delle matrici ortogonali $n \cdot n$ a valori in K). Si verifichi se $O_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.
   Soluzione:
   $\mathbb{I} = det(\mathbb{I}) = det(G \cdot G^t) = det(G) \cdot det(G^t) = (det(G))^2$ da cui segue l'asserto.
   $O_n(K)$ non é un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ perché, come si puó facilmente verificare, non contiene la matrice nulla.

3. Si calcoli determinante e rango delle seguenti matrici:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;
   $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Soluzione:
   $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9-10) - 2(3-4) = 1,$
   quindi si ha che $rank(A) = 3, (det(A) \neq 0)$;
   $det(B) = 0$ poichè ha tutte le righe uguali (ne bastano due) e $rank(B) = 1$ (basta sfruttare la definizione di rango di una matrice come numero di righe linearmente indipendenti);
   $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2(1-2) =$ 2, da cui $rank(C) = 3$.
   $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3$, da cui $rank(D) = 3$.

$det(E) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$
$2 + 2(1-2) = 0$,
quindi $rank(E) < 3$ in quanto la matrice ha determinante nullo (il rango non é massimo) ma $rank(E) \geq 2$ perché $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow rank(E) = 2$ (ho trovato un minore non nullo di ordine 2).

4. Determinare se le matrici dell'esercizio precedente sono invertibili e in tal caso calcolarne l'inversa.

   Soluzione:
   Sono invertibili le matrici quadrate di rango massimo quindi possiamo calcolare A^{-1}, C^{-1} e D^{-1}. Lo facciamo con la seguente formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Cof(A)^{\mathrm{T}}$$

   dove $Cof(A)^{\mathrm{T}}$ è la matrice cofattore di A trasposta.
   Le inverse trovate sono:
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $D^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Si trovino i valori del parametro reale c per cui il rango delle seguenti matrici sia massimo:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}$,

   Soluzione:

   Visto che A é una matrice quadrata basterá determinare ii valori del parametro c affinché $det(A) \neq 0$. Visto che $det(A) = 2c^2 - 3c + 1$ allora il rango di A eḿassimo quando $c \neq \{1.\frac{1}{2}\}$.

   $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & c & 2 & 1 \\ c+1 & 0 & c+1 & 1 \end{pmatrix}$,

   Soluzione:

   $Det(B(12|13)) = -1$ quindi per il principio dei minori orlati abbiamo che $r(B) > 2$; per vedere se rango di B é due o tre orliamo a partire dalla sottomatrice appena considerata; visto che $det(B(123|123)) = (c+1)(1-c)$ e che $det(B(123|134)) = c(2-c)$ allora si ha che $r(B) = 3$ indipendentemente dal valore che assume c infatti se $c = 0, 2$ allora la sottomatrice $B(123|123)$ ha rango massimo mentre, se $c = -1, 1$ allora la sottomatrice $B(123|134)$ ha rango massimo.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & c & 1 & c \\ c & 2 & c & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Soluzione:

Come nel caso di A basterà studiare il determinante di C; visto che $det(C) = 0$ indipendentemente dal valore di c possiamo concludere che $r(C) = 4$.

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ c-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ c & 2c & c \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Visto che $det(D(23|23)) = 1$ indipendentemente dal valore di c allora $r(D) = 2$; orlando troviamo che $det(D(123|123)) = c(c1)$ e che $det(D(234|123)) = c(c1)$ quindi se $c = 0, 1$ possiamo concludere che $r(D) = 3$ altrimenti $r(D) = 2$, non esisterebbero infatti minori non nulli di ordine tre.

6. Discutere la risolubilitá dei sistemi lineari $AX = B$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando il numero di soluzioni nei vari casi. Nei casi in cui il sistema sia risolubile, calcolarne le soluzioni (se la soluzione è unica utilizzare Cramer).

$$A_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 3 & 2k & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B_1 = \begin{pmatrix} k^2-1 \\ 2k-2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Soluzione:

$r(A_1) = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette esattamente una soluzione del tipo:

$$\left(\frac{(k-1)(k^2+3k+4)}{k^2+2k+3}; -\frac{1}{2}\frac{k^2+2k-3}{k^2+2k+3}; \frac{k^2+2k-3}{k^2+2k+3} \right).$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix};\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Soluzione:

Se $k \neq 1$ allora $r(A_2) = 3$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni per Rouché-Capelli del tipo:

$\left(-\frac{1}{k}t; 0; -\frac{1}{k}t; t\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Se $k=1$ allora $r(A_2)=2$ e il sistema ammette ∞^2 soluzioni per Rouché-Capelli del tipo:
$(-z-2t;-z-t;z;t)$, con $z,t\in\mathbb{R}$.

$A_3=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ 1 & k & 1\\ k & 1 & 1\end{pmatrix}$; $B_3=\begin{pmatrix}2k-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

Soluzione:

$Det(A_3)=0\ \ \forall k$, quindi $r(A_3)\leq 2\ \ \forall k$.
In particolare se $k\neq 1$ allora $r(A_3)=2$ e il sistema ammette soluzioni per Rouché-Capelli se e solo se $k=\frac{1}{2}$. In tal caso ci sono ∞^1 le soluzioni sono del tipo:
$\left(-\dfrac{4z-4}{3};\dfrac{4-2z}{3};z\right)$, con $z\in\mathbb{R}$.
Invece se $k\neq\frac{1}{2}$ il sistema é incompatibile.

$A_4=\begin{pmatrix}k & 2\\ 1 & -k\\ 3 & k-1\end{pmatrix}$; $B_4=\begin{pmatrix}k\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

Soluzione:

$r(A_4)=2\ \ \forall k\in\mathbb{R}$, mentre $r(A_4|B_4)=2\ \Leftrightarrow\ k=1\vee k=-\frac{2}{3}$. Quindi se k é diverso da uno di questi due valori il sistema é incompatibile, altrimenti ammette una soluzione.
Se $k=1$ la soluzione é del tipo $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
Se $k=-\frac{2}{3}$ la soluzione é del tipo $\left(\dfrac{2}{11};-\dfrac{3}{11}\right)$.

$A_5=\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ k+1 & 1 & -1\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B_5=\begin{pmatrix}-k\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$.

Soluzione:

Se $k\neq 0,-2$ allora $r(A_5)=3$, quindi il sistema ammette esattamente una soluzione per Rouché-Capelli:
$\left(-\dfrac{1}{k};\dfrac{1}{k};-1\right)$.
Se $k=0$ allora $r(A_5)=2$ e $r(A_5|B_5)=3$, quindi il sistema é incompatibile;
Se $k=-2$ allora $r(A_5)=2$ e $r(A_5|B_5)=2$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo:
$\left(\dfrac{2+z}{2};\dfrac{2+3z}{2};z\right)$, con $z\in\mathbb{R}$.