Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

SOLUZIONI TUTORATO 9
28 APRILE 2015

1. Verificare che le rette:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \frac{x-1}{3} = z \\ \frac{y-2}{-2} = z \end{cases}$$

sono parallele, e trovare l'equazione del piano E che le contiene.

Soluzione:

Si verifica facilmente che le giaciture di r ed s coincidono. Sia v tale giacitura comune. Prendiamo poi un punto su ciascuna retta, ad esempio $R = (0; 0; 1)$ in r e $S = (1; 2; 0)$ in s e calcoliamo l'equazione del piano passante per R e di giacitura $< v; \vec{SR} >$. Otteniamo cosí $E : y + 2z = 0$.

2. Sia $A^2(\mathbb{R})$ il 2-spazio affine numerico, sia $O\mathbb{E}_1\mathbb{E}_2$ il sistema di riferimento standard:

(a) si trovino le equazioni parametriche e cartesiana della retta r passante per $P = (1, 2)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2})$;

(b) si consideri la retta s passante per i punti $Q = (0, -\frac{3}{2})$ e $R = (-1, 2)$, si trovino le equazioni parametriche e cartesiana;

(c) r e s sono sghembe? Sono parallele? Sono incidenti? (Giustificare la risposta);

(d) si trovino gli eventuali punti in comune;

(e) si determinino le equazione della retta π del fascio proprio con centro il punto $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$ passante per $O = (0, 0)$;

(f) si scriva l'equazione del fascio improprio di rette parallele a π.

Soluzione:

(a) $x + 2y - 5 = 0$, $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$

(b) $7x + 2y + 3 = 0$, $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t \end{cases}$

(c) Due rette nel piano non possono essere sghembe, non sono parallele perché non hanno la stessa giacitura, quindi sono incidenti.

(d) Il punto in comune é $S = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$;

(e) $19x + 8y = 0$;

(f) $19x + 8y + t = 0$.

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

   (a) Sia r la retta di equazioni cartesiane:
   $$r : \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$
   Determinarne le equazioni parametriche.

   (b) Sia s la retta di equazioni cartesiane:
   $$s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0. \end{cases}$$
   Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti, determinare il loro punto di intersezione.

   (c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (1, 0, 1)$.

   (d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (1, -1, 4)$.

   (e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

Soluzione:

(a) Per trovare un vettore nella giacitura di r basta imporre $w = (l, m, n)$, dove $l = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $m = -det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $n = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Prendendo un punto sulla retta, ad esempio $R = (-1, 1, 0)$, otteniamo
$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$
(Nota: cambiando il punto R si ottiene una parametrizzazione diversa!!!)

(b) Sia A la matrice le cui righe sono determinate dai coefficienti dei piani che individuano le due rette r ed s; allora abbiamo che le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e soltanto se $det(A) = 0$. In questo caso si ha
$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$
Possiamo quindi concludere che le rette r ed s sono sghembe.

(c) Innanzitutto notiamo che esistono un unico piano p' contenente sia la retta r che il punto P ed un unico piano p'' contenente sia la retta s che il punto P. Tali piani sono distinti, altrimenti r ed s sarebbero complanari, ed hanno un punto in comune, e dunque hanno necessariamente una retta in comune. Ne segue che la retta cercata é $t = p' \cap p''$. Quindi utilizzando il fascio proprio di piani di asse r,

$$\lambda(x+2z+1)+\mu(2x+y+3z+1)=0$$

e imponendo il passaggio per il punto P otteniamo $4\lambda+6\mu=0$. Scegliendo ad esempio $\lambda=-3$ e $\mu=2$ troviamo il piano

$$p' : x+2y-1=0.$$

Utilizzando un procedimento analogo con il fascio di piani di asse s,

$$\lambda(x+1)+\mu(2x+3y+1)=0$$

imponiamo il passaggio per il punto P ottenendo $2\lambda+3\mu=0$. Troviamo allora il piano

$$p'' : x+6y-1=0.$$

Le equazioni cartesiane di $t=p'\cup p''$ sono dunque:
$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+6y-1=0 \end{cases}$.

(d) Le equazioni parametriche di q sono:
$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=4t \end{cases}$.
Scrivendo la matrice:
$\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
e annullando due qualsiasi dei suoi minori otteniamo le equazioni cartesiane di q:
$\begin{cases} -x-y+1=0 \\ 4y+z=0 \end{cases}$.

(e) Per stabilire se le rette t e q sono parallele, incidenti o sghembe calcoliamo il rango della matrice
$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si osserva facilmente che $det(B)=0$ e che la sottomatrice $B(234|234)$ é invertibile (ha rango massimo). Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli il sistema ha un'unica soluzione, dunque le rette sono incidenti nel punto $(1,0,0)$.

4. Date le seguenti n-uple di punti in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ fornire: dimensione, giacitura, equazioni cartesiane, equazioni parametriche del sottospazio minimo di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ che le contiene:

- $A=\{(1,0,0),(1,1,1),(1,3,3)\}$
- $B=\{(1,2,1),(2,5,2),(-1,-3,-1)\}$

- $C = \{(0,0,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$
- $D = \{(1,4,2),(1,5,3),(1,1,1)\}$
- $E = \{(0,1,1),(4,3,2),(2,2,\frac{3}{2})\}$
- $F = \{(3,2,7),(2,1,2),(0,0,1)\}$
- $G = \{(1,2,0),(2,0,1),(3,3,3),(5,0,2)\}$
- $H = \{(1,0,0),(0,1,1),(4,1,0),(5,0,-1)\}$

Soluzione:

Dati n punti $\{P_1,...,P_n\} \in A^3(\mathbb{R})$, per trovare il sottospazio minimo che li contiene, scegliamo un punto P_i tra questi, e calcoliamo la giacitura nel seguente modo:

$$W =< P_1,...,P_{i-1},P_{i+1},...,P_n >$$

Si prosegue con il calcolo delle equazioni parametriche e cartesiane nel modo usuale. Le equazioni trovate sono:

$A: \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$B: \quad \begin{cases} x = 1+u-2v \\ y = 2+3u-5v \\ z = 1+u-2v \end{cases} \qquad z-x=0$

$C: \quad \begin{cases} x = u+3v \\ y = 2u+2v \\ z = 3u+v \end{cases} \qquad 4x-7y+4z=0$

$D: \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+3u+4v \\ z = 1+u+2v \end{cases} \qquad x-1=0$

$E: \quad \begin{cases} x = 4t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$

$F: \quad \begin{cases} x = 3u+2v \\ y = 1+2u+v \\ z = 1+6u+v \end{cases} \qquad -2x+6y-z+1=0$

G: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

H: il sottospazio minimo é tutto $A^3(\mathbb{R})$.

5. Stabilire per i sottospazi A, B, C, D dell'esercizio precedente se la retta

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y-z=0 \end{cases}$$

risulta essere contenuta, parallela, coincidente, incidente o sghemba con il sottospazio. Inoltre nel caso di incidenza, fornire il punto di intersezione.

Soluzione:

Per determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini bisogna confrontare le giaciture della retta e dei sottospazi. Se non c'é parallelismo (o coincidenza), mettiamo a sistema le equazioni cartesiane per determinare i punti di incidenza.

Le soluzioni trovate sono:

- A e r sono coincidenti;
- B e r sono incidenti nel punto $(1; 1; 1)$;
- C e r sono incidenti nel punto $(1; \frac{3}{4}; \frac{3}{4})$;
- D contiene r.