Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Tutorato 5
24 Marzo 2015

1. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:

   - $r(A+B) \leq min\{r(A), r(B)\}$;
   - $r(A) = r = r(B) \Rightarrow r(AB) = r \qquad (r < n)$;
   - $r(A) < n$; $r(B) < n \Rightarrow r(AB) < n$;
   - $r(A) = n = r(B) \Rightarrow r(AB) = n$.

   Nel caso siano vere, si esibisca una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e definiamo $\mathcal{C}_{(a,b)} := \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua }\}$. Mostrare che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ é un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione infinita.

4. Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$ tale che $r(A^2) = 2$. Determinare il valore minimo e massimo che puó assumere il rango di A.

5. Utilizzando il metodo di Kronecker - Rouché - Capelli si determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro reale a.

   - $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x - 2y = a \\ 3x + ay + z = 0 \\ 2ax - ay + z = a \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az = 0 \end{cases}$
   - $\begin{cases} ax + az = 1 \\ 3x + y + az = a \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} ay + az = a \\ ax + y + az = 2 \\ ax - ay - az = a \end{cases}$
- $\begin{cases} x + z = -2 \\ 2x + y + t = -1 \\ -y - 2t - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z + t = 1 \end{cases}$