UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 15-7-2016

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - kX_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 1 \\ kX_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 + (1-k)X_4 = 2. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -k \\ k & -1 & -1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(A) = 4k^2 - 1 = 0$ se e solo se $k = \pm\frac{1}{2}$. Pertanto, se $k \neq \pm\frac{1}{2}$, abbiamo $r(A) = r(A\ b) = 4$ e il sistema è compatibile.

Invece se $k = \pm\frac{1}{2}$ abbiamo

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ \pm\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \pm 2 - 5 \neq 0$$

e quindi $r(A) = 3$, mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ \pm\frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 \\ \pm\frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (\pm 2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = \frac{1}{2} \\ 4 & \text{se } k = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi, per il principio dei minori orlati, $r(A\ b) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = \frac{1}{2} \\ 4 & \text{se } k = -\frac{1}{2} \end{cases}$ e ne deduciamo che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq -\frac{1}{2}$.
Se $k \neq \pm\frac{1}{2}$ le soluzioni sono date dalla regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & -k \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1-k \end{vmatrix}}{\det(A)} = 0, \ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -k \\ k & 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1-k \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{2(k+1)}{2k+1},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -k \\ k & -1 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1-k \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{1}{2k+1}, \ X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{3k(1-k)} = -\frac{2}{2k+1}.$$

Invece, se $k = \frac{1}{2}$, consideriamo il minore M per applicare la regola di Cramer. Si ha $M = -3$ e posto $X_4 = t$, cancellata la terza riga del sistema e portato X_4 a sinistra, si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{t}{2} & 1 & -2 \\ 1-t & -1 & -1 \\ 2-\frac{t}{2} & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2(t+1)}{3}, \ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1-t & -1 \\ 2 & 2-\frac{t}{2} & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5t-4}{6},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 1-t \\ 2 & -1 & 2-\frac{t}{2} \end{vmatrix}}{-3} = \frac{t}{2}, \ X_4 = t. \ \blacksquare$$

2. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + 2Y - Z = 0 \\ Z + X = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (1,1,0,2),\ (-1,0,-1,1),\ (k,3,-1,7) > .$$

(a) Determinare una base di W ed una di U_k.
(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$.
(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$< (-1,1,1,1), v > \subseteq U_k \cap W.$$

SOLUZIONE:

(a) Calcoliamo prima la dimensione di W. Posto, nelle equazioni di W, $Z = s, W = t$ si ha $X = -s, Y = s$ e quindi i vettori di W sono tutti del tipo

$$(-s, s, s, t) = s(-1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

pertanto una base di W è $\{(-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e $\dim(W) = 2$.
Si ha invece $\dim U_k = r(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ k & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - k, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ k & 3 & 7 \end{vmatrix} = k - 2$$

quindi, per il principio dei minori orlati, $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 2 \\ 2 & \text{se } k = 2 \end{cases}$ ed una sua base è $\{(1, 1, 0, 2), (-1, 0, -1, 1), (k, 3, -1, 7)\}$ se $k \neq 2$ e $\{(1, 1, 0, 2), (-1, 0, -1, 1)\}$ se $k = 2$.

(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k e W, cioè

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

e quindi $\dim(U_k + W) = r(B) = 4$ per ogni k e, usando la formula di Grassmann,

$$\dim(U_k \cap W) = \dim(U_k) + \dim(W) - \dim(U_k + W) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 2 \\ 2 & \text{se } k = 2 \end{cases} + 2 - 4 = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 2 \\ 0 & \text{se } k = 2 \end{cases}.$$

(c) Osserviamo intanto che $(-1, 1, 1, 1) \in W$, poichè si ottiene per $s = t = 1$. Se $k = 2$ abbiamo dalla (b) che $\dim(U_k \cap W) = 0$, quindi v non esiste. Invece se $k \neq 2$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e pertanto $(-1,1,1,1) \in U_k$. Ma allora $(-1,1,1,1) \in U_k \cap W$ e dato che, sempre dalla (b), $\dim(U_k \cap W) = 1$, deduciamo che $U_k \cap W =< (-1,1,1,1) >$ e quindi $v = a(-1,1,1,1)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Si conclude che v esiste se e solo se $k \neq 2$ ed è del tipo $(-a,a,a,a)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano p_k il piano passante per $Q(0,0,1,0)$ e parallelo a $v_1 = e_1 + ke_2, v_2 = e_2 + e_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - Y + W = 0 \\ X + Y + Z = 0 \\ kZ - kW = k \end{cases} .$$

(a) Determinare i valori di k per i quali T_k e $p_k \cap T_k$ sono sottospazi affini di A. Calcolare la dimensione di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, p_k è parallelo a T_k.

(c) Determinare (se esistono) per quali valori di k esiste una retta s in A tale che s è parallela a p_k e $s \subseteq T_k$.

SOLUZIONE:

(a) Consideriamo le matrici del sistema che definisce T_k

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix} \text{ e } (B,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k & k \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che $r(B) = r(B,b) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$, pertanto il sistema è sempre compatibile, T_k è un sottospazio per ogni k e

$$\dim T_k = 4 - r(B) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} .$$

Per studiare $p_k \cap T_k$ scriviamo prima le equazioni parametriche di p_k. Si ha

$$p_k : \begin{cases} X = s \\ Y = ks + t \\ Z = 1 \\ W = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nel sistema che definisce T_k abbiamo

$$p_k \cap T_k : \begin{cases} (1-k)s = 0 \\ (1+k)s + t + 1 = 0 \\ -kt = 0 \end{cases} .$$

Se $k = 0$ troviamo $s = 0, t = -1$ e quindi $p_0 \cap T_0$ è un punto $P \in A$. Se $k \neq 0$ troviamo

$$\begin{cases} (1-k)s = 0 \\ (1+k)s = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

che è compatibile se e solo se $k = 1$ e, in tal caso, ha l'unica soluzione $t = 0, s = -\frac{1}{2}$, che di nuovo dimostra che $p_1 \cap T_1$ è un punto $P \in A$. Quindi abbiamo che

$$p_k \cap T_k = \begin{cases} \emptyset & \text{if } k \neq 0,1 \\ \{P\} & \text{if } k = 0,1 \end{cases}$$

da cui deduciamo che $p_k \cap T_k$ è un sottospazio affine di A se e solo se $k = 0, 1$.
(b) Osserviamo che $v_2 \notin \text{giac}(T_k)$ in quanto $(0,1,0,1)$ non soddisfa la seconda equazione del sistema omogeneo che definisce la giacitura di T_k

$$\text{giac}(T_k) : \begin{cases} X - Y + W = 0 \\ X + Y + Z = 0 \\ kZ - kW = 0 \end{cases}.$$

Pertanto non esistono valori di k per i quali p_k è parallelo a T_k.
(c) Supponiamo che esista una retta s in A tale che s è parallela a p_k e $s \subseteq T_k$. Se $k \neq 0$, essendo T_k una retta, deduciamo che $s = T_k$ e quindi che p_k è parallelo a T_k, contraddicendo la (b).
Invece se $k = 0$ sappiamo che T_0 è un piano, dunque, se s esiste, si ha in particolare che s è parallela a p_0 e a T_0 e quindi $\text{giac}(s) \subset \text{giac}(p_0), \text{giac}(s) \subset \text{giac}(T_0)$ da cui, essendo $p_0 \cap T_0$ un sottospazio,

$$\text{giac}(s) \subseteq \text{giac}(p_0) \cap \text{giac}(T_0) = \text{giac}(p_0 \cap T_0).$$

Ma $p_0 \cap T_0$ è un punto, quindi $\text{giac}(p_0 \cap T_0) = \{0\}$ non può contenere $\text{giac}(s)$.
Pertanto non esistono valori di k per i quali esiste una retta s in A tale che s è parallela a p_k e $s \subseteq T_k$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $v = (0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v \in N(F), F(E_1) = E_1 + v, F(E_1 + E_4) = E_1 + kE_3, F(E_2 - E_3) = 3E_2 - 2E_4 + (1-k)E_1$$

dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v, E_1, E_1 + E_4, E_2 - E_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che i seguenti vettori sono già espressi nella base e:

$$F(v) = 0 \text{ e } F(E_1) = v + E_1$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo $F(E_1 + E_4) = E_1 + kE_3, F(E_2 - E_3) = 3E_2 - 2E_4 + (1-k)E_1$ nella base e. Si ha

$$av + bE_1 + c(E_1 + E_4) + d(E_2 - E_3) = (b+c)E_1 + (-a+d)E_2 - dE_3 + (a+c)E_4 = E_1 + kE_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ -a + d = 0 \\ -d = k \\ a + c = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -k, b = 1 - k, c = k, d = -k$. Pertanto

$$F(E_1 + E_4) = -kv + (1-k)E_1 + k(E_1 + E_4) - k(E_2 - E_3).$$

Analogamente

$$av + bE_1 + c(E_1 + E_4) + d(E_2 - E_3) = (b+c)E_1 + (-a+d)E_2 - dE_3 + (a+c)E_4 = 3E_2 - 2E_4 + (1-k)E_1$$

se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 1 - k \\ -a + d = 3 \\ -d = 0 \\ a + c = -2 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -3, b = -k, c = 1, d = 0$. Pertanto

$$F(E_2 - E_3) = -3v - kE_1 + (E_1 + E_4).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -k & -3 \\ 0 & 1 & 1-k & -k \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & -k & -3 \\ 0 & 1-T & 1-k & -k \\ 0 & 0 & k-T & 1 \\ 0 & 0 & -k & -T \end{vmatrix} = T(T-1)(T^2 - kT + k).$$

Le radici reali di $T(T-1)(T^2-kT+k) = 0$ sono $0, 1$ e, se $k \leq 0$ o $k \geq 4$, $\frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4k})$. Osserviamo che, per $k \leq 0$ o $k \geq 4$, si ha $\frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4k}) = 0$ se e solo se $k = 0$, mentre non esistono valori di k per i quali $\frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4k}) = 1$.
Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < 0$ o $k > 4$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 - 4k})$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 - 4k})$ (m.a. 1)
$0 < k < 4$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)
$k = 4$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = 4$, posto $T = 2$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_2(F) = 4 - 3 = 1$.
Ora prendiamo $\lambda_1 = 0$ nel caso $k = 0$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} y - 3w = 0 \\ y + z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = z = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo xv e una base di $V_0(F)$ è $\{v\}$.
(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k < 0$ o $k > 4$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	1	1
$\frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 - 4k})$	1	1
$\frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 - 4k})$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $0 < k < 4$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k = 4$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	1	1
2	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	3
1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < 0$ o $k > 4$. $\blacksquare$